TEORIA Y PROBLEMAS

Teoría de Conjuntos
y temas afines

SEYMOUR LIPSCHUTZ

Funciones, relaciones, números cardinales y ordinales
inducción transfinita, lema de Zorn, álgebra de proposiciones, álgebra booliana

530
PROBLEMAS RESUELTOS

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

LIBROS McGRAW-HILL



EDICION EXCLUSIVA PARA CHILE

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

TEORIA DE CONJUNTOS

y temas afines

SEYMOUR LIPSCHUTZ, Ph. D.
Associate Professor of Mathematics
Temple University

•

TRADUCCION Y ADAPTACION

JESÚS MARÍA CASTAÑO
Profesor de Matemáticas
de la Universidad del Valle, Colombia

Con la colaboración de

EMILIO ROBLEDO MONCADA
Profesor del Centro de Estudios Universitarios, Madrid

•

LIBROS McGRAW-HILL

PANAMA MEXICO NEW YORK

LONDON TORONTO SYDNEY JOHANNESBURG



EDICION EXCLUSIVA PARA CHILE

91625

Traducido de la primera edición del original publicado en inglés

6789 CyC-70 098765432

Esta edición de TEORIA DE CONJUNTOS y temas afines
de Seymour Lipschutz ha sido impresa en los talleres
de la EDITORIAL UNIVERSITARIA
San Francisco 454 - Santiago de Chile

EDICION EXCLUSIVA PARA CHILE
Prohibida su venta fuera
del territorio nacional
Segunda edición chilena,
10.000 ejemplares

Impreso en Chile / Printed in Chile

Prólogo

La teoría de conjuntos se encuentra en los fundamentos de la matemática, que, explícita o implícitamente, en todas sus ramas, utiliza conceptos de la citada teoría, tales como los de función y relación.

Este texto, que no es un tratado riguroso, axiomático, de la teoría de conjuntos, se divide en tres partes, de tal manera que, sin perturbar la exposición lógica de los conceptos, resulta tanto más útil como texto o como libro de consulta, a distintos niveles. La Parte I contiene una introducción a las operaciones elementales con conjuntos y un estudio detallado de los conceptos de función y de relación. La Parte II desarrolla la teoría de los números cardinales y de los ordinales, a la manera clásica de Cantor; trata también de los conjuntos parcialmente ordenados y del axioma de elección y sus equivalentes, incluyendo el lema de Zorn. La Parte III abarca temas que, por lo común, se presentan asociados a la teoría elemental de conjuntos.

Naturalmente, la exposición peculiar de ciertos temas acusa la influencia de las preferencias del autor; así, por ejemplo, introduce las funciones antes que las relaciones y no las define al principio como conjuntos de pares ordenados. Cada capítulo comienza con enunciados claros de oportunas definiciones, principios y teoremas, junto con material aclaratorio y descriptivo; a esto sigue una relación de problemas de creciente dificultad, unos resueltos y otros solo enunciados. Los primeros ilustran y amplían la teoría, poniendo de relieve aquellos detalles sin los cuales el estudiante se siente constantemente en terreno inseguro y que a la vez dan lugar a la repetición de los principios básicos, tan esencial para el aprendizaje eficaz. Numerosas demostraciones de teoremas y de consecuencias de los resultados fundamentales quedan incluidas en muchos de los problemas resueltos. Los enunciados suponen una revisión completa del material de cada capítulo.

Se estudian aquí muchos de los aspectos que no pueden abarcarse en el programa de la mayoría de los primeros cursos, con el propósito de hacer el libro más variado, para que sea más útil su consulta y para estimular un ulterior interés en los temas.

Damos a continuación la referencia de los textos que sugerimos para consulta. Los de Halmos y Kamke se recomiendan especialmente como lectura auxiliar en la Parte II.

Bourbaki, N., *Theorie des Ensembles*, Hermann, París, 1958
Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, 1960
Hausdorff, F., *Set Theory*, Chelsea, 1957
Kamke, E., *Theory of Sets*, Dover, 1950
Kuratowski, C., *Introduction to Set Theory and Topology*, Addison-Wesley, 1962
Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Caps. 1, 2, 14, Ungar, 1955

Deseo aprovechar esta oportunidad para agradecer a muchos de mis amigos y colegas sus valiosas sugerencias y la revisión crítica del manuscrito. Hago extensivo mi agradecimiento, de manera particular, al personal de la Schaum Publishing Company por su excelente colaboración.

Seymour Lipschutz

Nota del traductor

El lenguaje de las matemáticas se internacionaliza cada vez más, haciéndose más preciso, más exacto y menos propenso a ambigüedades. El simbolismo perfeccionado y la nomenclatura, aceptados por todos, harán realidad muy pronto el que se pueda leer un texto matemático sin apenas conocer la lengua de expresión de su autor.

Por esto, y buscando justamente la precisión, ha parecido aconsejable modificar ligeramente la nomenclatura y notación de este libro en su versión española, poniéndolas más acordes con lo que hoy es de uso más autorizado y universal. Así, por ejemplo, se introducen las expresiones «inyectiva» y «sobreyectiva», para designar las funciones que antes se llamaban «en» y «sobre», en su desafortunada traducción del inglés. Las sobredichas expresiones ya se van adoptando universalmente; Van der Waerden las emplea en la séptima edición de su *Algebra* (1966); McLane y Birkhof las introducen en su libro de *Algebra* (1967).

Para evitar sentidos equívocos de un mismo vocablo, se ha optado, definitivamente, por llamar «recíproca» a la función que aún muchos llaman inversa, con manifiesta impropiedad; inverso, se ha reservado para el simétrico multiplicativo. Se adoptan asimismo los nombres «mayorante» y «minorante», para lo que se denominaba antes cota superior o cota inferior, respectivamente.

En cuanto a los símbolos, solo se ha cambiado la notación de los intervalos abiertos: $]a, b[$ y no (a, b), que es ambigua —se confundiría con par de elementos (a, b)—; la del conjunto R, de los números reales (no $R^{\#}$, inútilmente recargada). No parece adecuado utilizar igual tipografía para las relaciones que son conjuntos de pares, y para los conjuntos corrientes; así que se ha preferido la inglesa $\mathcal{R}$ y no R, que es lo que obligaba al uso del signo volado para denotar los reales.

No hay para qué distinguir entre «conjuntos enumerables» (infinitos) y «contables» (finitos), pues los finitos son siempre partes de conjuntos enumerables y, por tanto, son enumerables. Hoy se tiende a considerar «enumerable» como sinónimo de «infinito», con la propiedad de ser enumerable; así, Garsoux, *Analyse* (1968).

Tabla de materias

Parte I

Teoría elemental de conjuntos

Parte II

Cardinales, ordinales, inducción transfinita

Parte III

Temas anexos

Parte I: Teoría elemental de conjuntos

Capítulo 1

Conjuntos y subconjuntos

CONJUNTOS

El concepto de *conjunto* es fundamental en todas las ramas de la matemática. Intuitivamente, un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos, objetos que, como se verá en los ejemplos, pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, ríos, etc. Estos objetos se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto.

Si bien los conjuntos se estudian como entidades abstractas, enumeremos diez ejemplos particulares de conjuntos.

Ejemplo 1-1: Los números 1, 3, 7 y 10.
Ejemplo 1-2: Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 2 = 0$.
Ejemplo 1-3: Las vocales del alfabeto: a, e, i, o, u.
Ejemplo 1-4: Las personas que habitan la Tierra.
Ejemplo 1-5: Los estudiantes Tomás, Ricardo y Enrique.
Ejemplo 1-6: Los estudiantes ausentes de la escuela.
Ejemplo 1-7: Los países Inglaterra, Francia y Dinamarca.
Ejemplo 1-8: Las ciudades capitales de Europa.
Ejemplo 1-9: Los números 2, 4, 6, 8, . . .
Ejemplo 1-10: Los ríos de los Estados Unidos.

Nótese que los conjuntos de los ejemplos impares vienen *definidos*, o sea presentados, enumerando de hecho sus elementos, y que los conjuntos de los ejemplos pares se definen enunciando propiedades, o sea reglas, que deciden si un objeto particular es o no elemento del conjunto.

NOTACION

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas

$$A, B, X, Y, \dots$$

Los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas

$$a, b, x, y, \dots$$

Al definir un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos, por ejemplo, el A, que consiste en los números 1, 3, 7 y 10, se escribe

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

separando los elementos por comas y encerrándolos entre llaves { }. Esta es la llamada *forma tabular* de un conjunto. Pero si se define un conjunto enunciando propiedades que deben tener sus elementos como, por ejemplo, el B, conjunto de todos los números pares, entonces se emplea una letra, por lo general x, para representar un elemento cualquiera y se escribe

$$B = \{x \mid x \text{ es par}\}$$

lo que se lee «B es el conjunto de los números x tales que x es par». Se dice que ésta es la forma de definición por comprensión o *constructiva* de un conjunto. Téngase en cuenta que la barra vertical «|» se lee «tales que».

Para aclarar el empleo de la anterior notación, se escriben de nuevo los conjuntos de los Ejemplos 1-1 al 1-10, designando los conjuntos por $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, respectivamente.

Ejemplo 2-1: $A_1 = \{1, 3, 7, 10\}$.
Ejemplo 2-2: $A_2 = \{x \mid x^2 - 3x - 2 = 0\}$.
Ejemplo 2-3: $A_3 = \{a, e, i, o, u\}$.
Ejemplo 2-4: $A_4 = \{x \mid x$ es una persona que habita en la Tierra$\}$.
Ejemplo 2-5: $A_5 = \{$Tomás, Ricardo Enrique$\}$.
Ejemplo 2-6: $A_6 = \{x \mid x$ es estudiante y x está ausente de la escuela$\}$.
Ejemplo 2-7: $A_7 = \{$Inglaterra, Francia, Dinamarca$\}$.
Ejemplo 2-8: $A_8 = \{x \mid x$ es una ciudad capital y x está en Europa$\}$.
Ejemplo 2-9: $A_9 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
Ejemplo 2-10: $A_{10} = \{x \mid x$ es un río y x está en los Estados Unidos$\}$.

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe

$$x \in A$$

que se puede leer también «x pertenece a A» o «x está en A». Si por el contrario, un objeto x no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x entre sus elementos, se escribe

$$x \notin A$$

Es costumbre en los escritos matemáticos poner una línea vertical «|» u oblicua «/» tachando un símbolo para indicar lo opuesto o la negación del significado del símbolo.

Ejemplo 3-1: Si $A = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $a \in A$, $b \notin A$, $e \in A$, $f \notin A$.
Ejemplo 3-2: Si $B = \{x \mid x$ es par$\}$, entonces $3 \notin B$, $6 \in B$, $11 \notin B$, $14 \in B$.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Los conjuntos pueden ser *finitos* o *infinitos*. Intuitivamente, un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito. Posteriormente se dará una definición precisa de conjuntos infinito y finito.

Ejemplo 4-1: Si M es el conjunto de los días de la semana, entonces M es finito.
Ejemplo 4-2: Si $N = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, N es infinito.
Ejemplo 4-3: Si $P = \{x \mid x$ es un río de la Tierra$\}$, P es también finito aunque sea difícil contar los ríos del mundo.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

El conjunto A es *igual* al conjunto B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A pertenece también a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. Se denota la igualdad de los conjuntos A y B por

$$A = B$$

Ejemplo 5-1: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 1, 4, 2\}$. Entonces $A = B$, es decir, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$, pues cada uno de los elementos 1, 2, 3 y 4 de A pertenece a B y cada uno de los elementos 3, 1, 4 y 2 de B pertenece a A. Obsérvese, por tanto, que un conjunto no cambia al reordenar sus elementos.

Ejemplo 5-2: Sean $C = \{5, 6, 5, 7\}$ y $D = \{7, 5, 7, 6\}$. Entonces $C = D$, es decir, $\{5, 6, 5, 7\} = \{7, 5, 7, 6\}$, ya que cada elemento de C pertenece a D y que cada elemento de D pertenece a C. Nótese que un conjunto no cambia si se repiten sus elementos. Así que el conjunto $\{5, 6, 7\}$ es igual al C y al D.

Ejemplo 5-3: Sean $E = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2, 1\}$ y $G = \{1, 2, 2, 1\}$. Resulta $E = F = G$.

CONJUNTO VACIO

Conviene introducir el concepto de *conjunto vacío*, es decir, de un conjunto que carece de elementos. Este conjunto se suele llamar *conjunto nulo* Aquí diremos de un conjunto semejante que es *vacío* y se le denotará por el símbolo $\varnothing$.

Ejemplo 6-1: Si A es el conjunto de personas vivientes mayores de 200 años, A es vacío según las estadísticas conocidas

Ejemplo 6-2: Sea $B = \{x \mid x^2 = 4, x \text{ es impar}\}$. B es entonces un conjunto vacío

SUBCONJUNTOS

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B. Más claro: A es un subconjunto de B si $x \in A$ implica $x \in B$. Se denota esta relación escribiendo

$$A \subset B$$

que también se puede leer «A está contenido en B».

Ejemplo 7-1: El conjunto $C = \{1, 3, 5\}$ es un subconjunto del $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, ya que todo número 1, 3 y 5 de C pertenece también a D.

Ejemplo 7-2: El conjunto $E = \{2, 4, 6\}$ es un subconjunto del $F = \{6, 2, 4\}$, pues cada número 2, 4 y 6 que pertenece a E pertenece también a F Obsérvese en particular que $E = F$. De la misma manera se puede mostrar que todo conjunto es subconjunto de sí mismo

Ejemplo 7-3: Sean $G = \{x \mid x \text{ es par}\}$, es decir, $G = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ y $F = \{x \mid x \text{ es potencia entera positiva de } 2\}$, es decir, $F = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Entonces $F \subset G$, o sea que F está contenido en G.

Con la anterior definición de subconjunto se puede dar de otra manera la definición de la igualdad de dos conjuntos·

Definición 1-1: Dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si, y solo si, $A \subset B$ y $B \subset A$.

Si A es un subconjunto de B, se puede escribir también

$$B \supset A$$

que se lee «B es un superconjunto de A» o «B contiene a A» Y se escribe, además,

$$A \not\subset B \quad \text{o} \quad B \not\supset A$$

si A no es subconjunto de B

Para concluir, se tiene:

Observación 1-1: El conjunto vacío $\varnothing$ se considera subconjunto de todo conjunto

Observación 1-2: Si A no es subconjunto de B, es decir, si $A \not\subset B$, entonces hay por lo menos un elemento de A que no es elemento de B.

SUBCONJUNTO PROPIO

Puesto que todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo, se dirá que B es un *subconjunto propio* de A si, en primer lugar, B es un subconjunto de A y, en segundo lugar, B no es igual a A. Mas brevemente, B es un subconjunto propio de A si

$$B \subset A \quad \text{y} \quad B \neq A$$

En algunos libros «B es un subconjunto de A» se denota por

$$B \subseteq A$$

y «B es un subconjunto propio de A» se denota por

$$B \subset A$$

Aquí se seguirá la notación ya vista que no distingue entre subconjunto y subconjunto propio.

COMPARABILIDAD

Dos conjuntos A y B se dicen *comparables* si

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \subset A$$

esto es, si uno de los conjuntos es subconjunto del otro. En cambio, dos conjuntos A y B se dicen *no comparables* si

$$A \not\subset B \quad \text{y} \quad B \not\subset A$$

Nótese que si A no es comparable con B, entonces hay en A un elemento que no está en B y hay también en B un elemento que no está en A.

Ejemplo 8-1: Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{a, b, c\}$ Entonces A es comparable con B, pues A es un subconjunto de B.

Ejemplo 8-2: Si $C = \{a, b\}$ y $D = \{b, c, d\}$, C y D no son comparables, pues $a \in C$ y $a \notin D$ y $c \in D$ y $c \notin C$

TEOREMA Y DEMOSTRACION

En matemáticas puede demostrarse la verdad de muchas afirmaciones mediante suposiciones y definiciones previas. De hecho, la esencia de las matemáticas consiste en teoremas y sus demostraciones. Demostremos nuestro primer

Teorema 1-1: Si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de C, entonces A es un subconjunto de C, esto es,

$$A \subset B \text{ y } B \subset C \text{ implican } A \subset C$$

Demostración, (Téngase en cuenta que debemos demostrar que todo elemento de A es también un elemento de C.) Sea x un elemento de A, esto es, $x \in A$. Como A es un subconjunto de B, x pertenece también a B, es decir, $x \in B$. Pero, por hipótesis, $B \subset C$; por tanto, todo elemento de B, en el cual está x, es un elemento de C. Hemos demostrado que $x \in A$ implica $x \in C$. En consecuencia, por definición, $A \subset C$.

CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Ocurre a veces que los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos; por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos de A. Para evitar decir «conjuntos de conjuntos», se suele decir «familia de conjuntos» o «clase de conjuntos». En tales casos y para evitar confusiones, se emplean letras inglesas

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$$

para designar familias o clases de conjuntos, ya que las mayúsculas denotan sus elementos.

Ejemplo 9-1: En geometría es corriente hablar de «familias de rectas» o «familias de curvas», pues rectas y curvas ya son ellas mismas conjuntos de puntos.

Ejemplo 9-2: El conjunto $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ es una familia de conjuntos. Sus elementos son los conjuntos $\{2, 3\}$, $\{2\}$ y $\{5, 6\}$.

En teoría es posible que un conjunto tenga entre sus elementos algunos que sean a su vez conjuntos y otros que no lo sean, pero en las aplicaciones de la teoría de conjuntos este caso se presenta rara vez

Ejemplo 9-3: Sea $A = \{2, \{1, 3\}, 4, \{2, 5\}\}$ A no es, pues, una familia de conjuntos, algunos elementos de A son conjuntos y otros no.

CONJUNTO UNIVERSAL

En toda aplicación de la teoría de conjuntos todos los conjuntos que se consideran serán muy probablemente subconjuntos de un mismo conjunto dado. Este conjunto se llamara *conjunto universal* o *universo del discurso* y se denotará por U.

Ejemplo 10-1: En geometría plana el conjunto universal es el de todos los puntos del plano

Ejemplo 10-2: En los estudios sobre población humana el conjunto universal es el de todas las gentes del mundo.

CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S se llama conjunto potencia de S. Se le designa por

$$2^S$$

Ejemplo 11-1: Si $M = \{a, b\}$, entonces

$$2^M = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$$

Ejemplo 11-2: Si $T = \{4, 7, 8\}$, entonces

$$2^T = \{T, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \emptyset\}$$

Si un conjunto S es finito, digamos que S tenga n elementos, entonces el conjunto potencia de S tendrá 2^n elementos, como se puede demostrar. Esta es una razón para llamar conjunto de potencia de S la clase de los subconjuntos de S y para denotarla por 2^S.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si ningun elemento de A está en B y si ningún elemento de B esta en A, se dice que A y B son disjuntos.

Ejemplo 12-1: Sean $A = \{1, 3, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 7, 9\}$. A y B no son disjuntos entonces, pues 7 está en ambos conjuntos, o sea que $7 \in A$ y $7 \in B$.

Ejemplo 12-2: Sean A el conjunto de los números positivos y B el de los numeros negativos. Entonces A y B son disjuntos, pues ningun número es positivo y negativo

Ejemplo 12-3: Si $E = \{x, y, z\}$ y $F = \{r, s, t\}$, E y F son disjuntos

DIAGRAMAS DE VENN-EULER

Se logra ilustrar de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos mediante los llamados diagramas de Venn-Euler, o de Venn, simplemente, que representan un conjunto con un área plana, por lo general delimitada por un círculo.

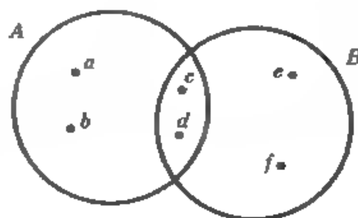
Ejemplo 13-1: Supóngase $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces A y B se describen con uno de los diagramas



Ejemplo 13-2: Si A y B no son comparables se les puede representar por el diagrama de la derecha si son disjuntos o por el de la izquierda si no lo son



Ejemplo 13-3: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$. Se ilustran estos conjuntos con un diagrama de Venn de la forma



DIAGRAMAS LINEALES

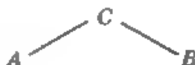
Otra manera útil e instructiva para ilustrar las relaciones entre conjuntos es el empleo de los llamados diagramas lineales. Si $A \subset B$, se escribe entonces B más arriba que A y se les conecta por un segmento



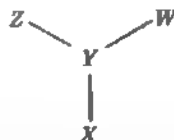
Si $A \subset B$ y $B \subset C$, se pone



Ejemplo 14-1: Sean $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ y $C = \{a, b\}$. El diagrama lineal de A, B y C es entonces



Ejemplo 14-2: Sean $X = \{x\}$, $Y = \{x, y\}$, $Z = \{x, y, z\}$ y $W = \{x, y, w\}$. Aquí el diagrama lineal de X, Y, Z y W es



DESARROLLO AXIOMATICO DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

En un desarrollo axiomático de una rama de las matemáticas, se comienza por:

(1) Términos no definidos.

(2) Relaciones no definidas.

(3) Axiomas que relacionan los términos no definidos y las relaciones no definidas.

Entonces se desarrollan teoremas basados en los axiomas y definiciones.

Ejemplo 15-1: En un desarrollo axiomático de la geometría plana euclidiana

(1) «puntos» y «rectas» son términos no definidos,

(2) «punto en una recta» o, lo que es equivalente, «recta que contiene un punto», es una relación no definida.

(3) Dos de los axiomas son

Axioma 1: Dos puntos distintos están sobre una y misma recta.

Axioma 2: Dos rectas distintas no pueden tener más de un punto común.

En un desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos:

(1) «Elemento» y «conjunto» son términos no definidos
(2) «Pertenencia de un elemento a un conjunto» es la relación no definida
(3) Dos de los axiomas son:

Axioma de extensión: Dos conjuntos A y B son iguales si, y solamente si, todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A

Axioma de especificación: Sea $P(x)$ una afirmación y sea A un conjunto. Existe entonces un conjunto

$$B = \{a \mid a \in A,\ P(a) \text{ es cierta}\}$$

Aquí, $P(x)$ es un enunciado en una variable, para la cual $P(a)$ es verdadero o falso con $a \in A$. Por ejemplo, $P(x)$ podría ser el enunciado «$x^2 = 4$» o «x es un miembro de las Naciones Unidas».

Hay otros axiomas que no se enuncian aquí porque los axiomas tocan con conceptos que se estudiarán luego. Y, por otra parte, como aquí se trata la teoría de conjuntos sobre todo intuitivamente, en especial en la Parte I, nos abstendremos de hacer más consideraciones sobre el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos

Problemas resueltos

NOTACION

1. Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

(1) x no pertenece a A.
(2) R es superconjunto de S.
(3) d es elemento de E.
(4) F no es subconjunto de G.
(5) H no incluye a D.

Solución:

(1) $x \notin A$, (2) $R \supset S$, (3) $d \in E$, (4) $F \not\subset G$, (5) $H \not\supset D$

2. Si $A = \{x \mid 2x = 6\}$ y $b = 3$, ¿es $b = A$?

Solución:

A es un conjunto que consta del único elemento 3, es decir, $A = \{3\}$. El número 3 es elemento de A, pero no es igual a A. Hay una fundamental diferencia entre un elemento x y el conjunto $\{x\}$

3. Sea $M = \{r, s, t\}$. Es decir, M consta de los elementos r, s y t. Dígase cuáles de las afirmaciones son correctas o incorrectas. Si alguna es incorrecta, decir por qué

$$(a)\ r \in M \quad (b)\ r \subset M \quad (c)\ \{r\} \in M \quad (d)\ \{r\} \subset M$$

Solución:

(*a*) Correcta.
(*b*) Incorrecta. El símbolo $\subset$ debe estar entre dos conjuntos, pues indica que un conjunto es subconjunto del otro. Así que $r \subset M$ es incorrecta por ser r un elemento de M, no un subconjunto.
(*c*) Incorrecta. El símbolo $\in$ vincula un objeto a un conjunto, pues indica que el objeto es elemento del conjunto. Así que $\{r\} \in M$ es incorrecta, ya que $\{r\}$ es un subconjunto de M, no un elemento de M
(*d*) Correcta

4. Enunciar con palabras y luego escribir en forma tabular:

(1) $A = \{x \mid x^2 = 4\}$

(2) $B = \{x \mid x - 2 = 5\}$

(3) $C = \{x \mid x$ es positivo, x es negativo$\}$.

(4) $D = \{x \mid x$ es una letra de la palabra «correcto»$\}$.

Solución:

(1) Se lee «A es el conjunto de los x tales que x al cuadrado es igual a cuatro». Los únicos números que elevados al cuadrado dan cuatro son 2 y -2, así que $A = \{2, -2\}$.

(2) Se lee «B es el conjunto de los x tales que x menos 2 es igual a 5». La única solución es 7, de modo que $B = \{7\}$.

(3) Se lee «C es el conjunto de los x tales que x es positivo y x es negativo». No hay ningún número que sea positivo y negativo, así que C es vacío, es decir, $C = \varnothing$.

(4) Se lee «D es el conjunto de los x tales que x es una letra de la palabra *correcto*». Las letras indicadas son c, o, r, e y t; así, pues, $D = \{$c, o, r, e, t$\}$.

5. Escribir estos conjuntos en una forma constructiva:

(1) El A que consiste de las letras a, b, c, d y e.

(2) El $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

(3) El conjunto C de todos los países de las Naciones Unidas.

(4) El conjunto $D = \{3\}$.

(5) Sea E los presidentes Truman, Eisenhower y Kennedy.

Solución:

Nótese en primer lugar que la descripción de un conjunto, o sea su forma constructiva, no es necesariamente única. Lo único que se requiere es que toda descripción defina el mismo conjunto. Se dan aquí algunas de las muchas respuestas posibles a este problema.

(1) $A = \{x \mid x$ está antes de f en el alfabeto$\}$
$= \{x \mid x$ es una de las primeras cinco letras del alfabeto$\}$.

(2) $B = \{x \mid x$ es par y positivo$\}$.

(3) $C = \{x \mid x$ es un país, x está en las Naciones Unidas$\}$.

(4) $D = \{x \mid x - 2 = 1\} = \{x \mid 2x = 6\}$.

(5) $E = \{x \mid x$ fue presidente después de Franklin D. Roosevelt$\}$.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

6. ¿Cuáles conjuntos son finitos?

(1) Los meses del año.

(2) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$.

(3) Las gentes que viven en la tierra.

(4) $\{x \mid x$ es par$\}$.

(5) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Solución:

Los tres primeros conjuntos son finitos. Aunque pueda ser físicamente imposible contar el número de personas que hay en la Tierra, el conjunto es ciertamente finito. Los dos últimos conjuntos son infinitos. Si se tratara de contar los números pares jamás se llegaría al fin.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

7. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales: $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$?

Solución:

Son todos iguales entre sí. Obsérvese que el orden o la repetición no cambia un conjunto.

8. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
(1) $\{x \mid x$ es una letra en la palabra «tocata»$\}$.
(2) Las letras de la palabra «tacto».
(3) $\{x \mid x$ es una letra de la palabra «cota»$\}$.
(4) Las letras a, c, o, t.

Solución:

Escribiendo los conjuntos en forma tabular es fácil averiguar si son o no iguales. Una vez escritos los cuatro conjuntos en forma tabular se ve que todos son iguales al conjunto {a, c, o, t}

CONJUNTO VACIO

9. ¿Cuál de estas palabras es distinta de las otras y por qué?: (1) vacío, (2) cero, (3) nulo.

Solución:

La primera y la tercera se refieren al conjunto sin elementos; la palabra cero se refiere a un número particular y es, por tanto, la palabra diferente.

10. Entre los conjuntos que siguen, ¿cuáles son diferentes?: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$

Solución:

Cada uno es diferente de los otros. El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el número cero El conjunto $\varnothing$ no tiene elementos, es el conjunto vacío. El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene también un elemento que es el conjunto vacío es un conjunto de conjuntos.

11. ¿Cuáles de estos conjuntos son vacíos?
(1) $A = \{x \mid x$ es una letra anterior a a en el alfabeto$\}$.
(2) $B = \{x \mid x^2 = 9 \text{ y } 2x = 4\}$.
(3) $C = \{x \mid x \neq x\}$.
(4) $D = \{x \mid x + 8 = 8\}$.

Solución:

(1) Como a es la primera letra del alfabeto, el conjunto A carece de elementos, por tanto, $A = \varnothing$
(2) No hay número que satisfaga a ambas ecuaciones $x^2 = 9$ y $2x = 4$; así que B es también vacío
(3) Se da por sentado que todo objeto es él mismo, de modo que C es vacío Tanto es así que algunos libros definen de esta manera el conjunto vacío, es decir,

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

(4) El número cero satisface a la ecuación $x + 8 = 8$, así que D consta del elemento cero Por tanto, D no es vacío.

SUBCONJUNTOS

12. Dado $A = \{x, y, z\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

Solución:

Haciendo la lista de todos los subconjuntos posibles de A resultan ser: $\{x, y, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ y el conjunto vacío $\varnothing$. Hay ocho subconjuntos en A.

13. Definir los siguientes conjuntos de figuras del plano euclidiano:

$Q = \{x \mid x$ es un cuadrilátero$\}$. $H = \{x \mid x$ es un rombo$\}$.
$R = \{x \mid x$ es un rectángulo$\}$. $S = \{x \mid x$ es un cuadrado$\}$.

Decir qué conjuntos son subconjuntos propios de los otros.

Solución:

Como un cuadrado tiene 4 ángulos rectos, es un rectangulo, y como tiene 4 lados iguales, es un rombo; y puesto que tiene 4 lados, es un cuadrilátero. Según eso $S \subset Q$, $S \subset R$, $S \subset H$, es decir, S es un subconjunto de los otros tres. Y, además, como hay rectángulos, rombos y cuadriláteros que no son cuadrados, resulta ser S un subconjunto propio de los otros tres. De manera analoga se ve que R es un subconjunto propio de Q, y que H es un subconjunto propio de Q. No hay otras relaciones entre los conjuntos

14. ¿Tiene todo conjunto un subconjunto propio?

Solución:

El conjunto vacío $\emptyset$ no tiene subconjunto propio. Cualquier otro conjunto tiene al $\emptyset$ como subconjunto propio. En algunos libros no se llama subconjunto propio al conjunto vacío, y entonces los conjuntos que tienen un solo elemento no tendrían un subconjunto propio.

15. Demostrar: Si A es un subconjunto del conjunto vacío $\emptyset$, entonces $A = \emptyset$.

Solución:

El conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto, en particular, $\emptyset \subset A$. Por hipótesis, $A \subset \emptyset$. De modo que, por la Definición 1-1, $A = \emptyset$.

16. ¿Cómo se demuestra que un conjunto A no es un subconjunto de otro conjunto B? Demostrar que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ no es un subconjunto de $B = \{x \mid x \text{ es par}\}$.

Solución:

Hay que demostrar que hay al menos un elemento de A que no está en B. Como $3 \in A$ y $3 \notin B$, se ve que A no es un subconjunto de B, o sea que $A \not\subset B$. Nótese que no es necesario saber si hay o no otros elementos de A que no estén en B.

17. Sean $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{a, b, d\}$. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(1) $Y \subset X$	(3) $W \neq Z$	(5) $V \not\subset Y$	(7) $V \subset X$	(9) $X = W$
(2) $W \not\supset V$	(4) $Z \supset V$	(6) $Z \not\supset X$	(8) $Y \not\subset Z$	(10) $W \subset Y$

Solución:

(1) Como todo elemento de Y es elemento de X, resulta que $Y \subset X$ es verdadera.
(2) El único elemento de V es d, y d también está en W, así que W es un superconjunto de V y, por tanto, $W \not\supset V$ es falsa.
(3) Como $a \in Z$ y $a \notin W$, $W \neq Z$ es verdadera.
(4) Z es un superconjunto de V puesto que el único elemento de V es elemento de Z, por tanto, $Z \supset V$ es verdadera.
(5) Como $d \in V$ y $d \notin Y$, $V \not\subset Y$ es verdadera.
(6) Como $c \in X$ y $c \notin Z$, entonces Z no es un superconjunto de X, es decir, $Z \not\supset X$ es verdadera.
(7) V no es un subconjunto de X, ya que $d \in V$ y $d \notin X$, por tanto, $V \subset X$ es falsa.
(8) Todo elemento de Y lo es de Z; luego $Y \not\subset Z$ es falsa.
(9) Como $a \in X$ y $a \notin W$, $X = W$ es falsa.
(10) Como $c \in W$ y $c \notin Y$, W no es un subconjunto de Y y, por tanto, $W \supset Y$ es falsa.

18. Sean $A = \{r, s, t, u, v, w\}$, $B = \{u, v, w, x, y, z\}$, $C = \{s, u, y, z\}$, $D = \{u, v\}$, $E = \{s, u\}$ y $F = \{s\}$. Sea X un conjunto desconocido. Determinar cuáles de los conjuntos A, B, C, D, E o F pueden ser iguales a X si se dan las informaciones siguientes:

(1) $X \subset A$ y $X \subset B$	(3) $X \not\subset A$ y $X \not\subset C$
(2) $X \not\subset B$ y $X \subset C$	(4) $X \subset B$ y $X \not\subset C$

Solución:

(1) El único conjunto que es subconjunto de A y de B es D. C, E y F no son subconjuntos de B porque $s \in C$, E, F y $s \notin B$.
(2) El conjunto X puede ser igual a C, E o F, pues éstos son subconjuntos de C y, como ya se vio, no son subconjuntos de B.
(3) Solo B no es subconjunto de A o de C. D y A son subconjuntos de A; y C, E y F son subconjuntos de C. Así que $X = B$.
(4) Tanto B como D son subconjuntos de B y no lo son de C. Todos los otros conjuntos dejan de cumplir al menos una de las condiciones. Por tanto, $X = B$ o $X = D$.

19. Sea A un subconjunto de B y sea B un subconjunto de C, es decir, $A \subset B$ y $B \subset C$. Suponiendo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ y, además, $d \notin A$, $e \notin B$, $f \notin C$, ¿cuáles afirmaciones serán ciertas?

(1) $a \in C$, (2) $b \in A$, (3) $c \notin A$, (4) $d \in B$, (5) $e \notin A$, (6) $f \notin A$

Solución:

(1) Por el Teorema 1-1, A es un subconjunto de C. Luego $a \in A$ implica $a \in C$, y la afirmación es siempre cierta.
(2) Como el elemento $b \in B$ puede no ser elemento de A, la afirmación es falsa.
(3) El elemento $c \in C$ podría ser un elemento de A, por lo que $c \notin A$ puede no ser verdad.
(4) El elemento d, que no está en A, puede no estar en B, así que la afirmación puede no ser cierta.
(5) Como $e \notin B$ y $A \subset B$, $e \notin A$ es siempre verdadera.
(6) Como $f \notin C$ y $A \subset C$, $f \notin A$ es siempre cierta.

DIAGRAMAS LINEALES

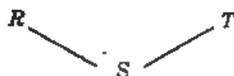
20. Hacer un diagrama lineal para los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{a, c\}$.
Solución:
Como $A \supset B$, $A \supset C$ y B y C no son comparables, se construye así



21. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{b\}$.
Solución:
Aquí $Z \subset Y$ e $Y \subset X$. Queda entonces

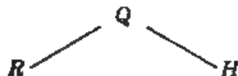


y no



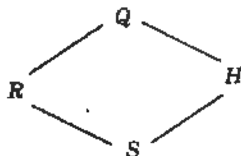
ya que el segmento de Z a X es redundante porque $Z \subset Y$ e $Y \subset X$ ya implican $Z \subset X$.

22. Construir el diagrama de los conjuntos $R = \{r, s, t\}$, $S = \{s\}$ y $T = \{s, t, u\}$.
Solución:
Aquí $S \subset R$ y $S \subset T$. Y como R y T no son comparables, se pone



23. Sean Q, R, H y S los conjuntos del Problema 13. Hacer un diagrama lineal para estos conjuntos.
Solución:
Como $Q \supset R$ y $Q \supset H$, se construye primero

Ahora se agrega S al diagrama. Puesto que $S \subset R$ y $S \subset H$, se completa el diagrama como sigue



24. Construir un diagrama lineal para los conjuntos V, W, X, Y y Z del Problema 17

Solución:

Como $V \subset W$ y $V \subset Z$, se traza



Como $Y \subset Z$, se agrega Y al diagrama:



Por último, puesto que $Y \subset X$, se completa el diagrama como sigue:



25. Sea S cualquier conjunto. Construir un diagrama lineal para los conjuntos $\emptyset$, S y el conjunto universal U

Solución:

Ya que el conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto, o sea $\emptyset \subset S$, se traza

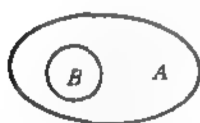


Por otra parte, como el conjunto universal U es un superconjunto de todo conjunto que incluya al S, se completa el diagrama como sigue:

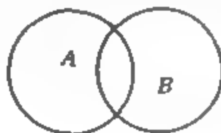


PROBLEMAS DIVERSOS

26. Considérense las cinco afirmaciones siguientes: (1) $A \subset B$, (2) $A \supset B$, (3) $A = B$, (4) A y B son disjuntos, (5) A y B no son comparables. ¿Cuál afirmación describe mejor cada diagrama de Venn?



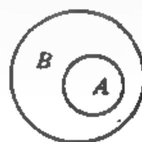
(a)



(b)



(c)



(d)

Solución:

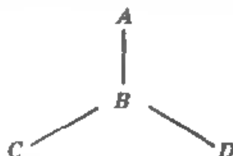
(a) El área de B es parte del área de A; luego $A \supset B$.

(b) Hay puntos en A que no están en B, y puntos en B que no están en A, luego A y B no son comparables. Los conjuntos no son disjuntos porque tienen puntos que pertenecen a ambos

(c) Aquí los conjuntos son disjuntos, pues no hay ningún punto que esté en los dos conjuntos. Los conjuntos no son tampoco comparables.

(d) El área de A es parte del área de B, luego $A \subset B$.

27. Examinar el siguiente diagrama lineal de conjuntos A, B, C y D.



Escribir una afirmación que relacione cada par de conjuntos del diagrama. Debe haber seis afirmaciones.

Solución:

En primer lugar se ve que $C \subset B$, $D \subset B$ y $B \subset A$, pues estos conjuntos están unidos por segmentos Por el Teorema 1-1 se deduce que $C \subset A$ y $D \subset A$ Por último, los conjuntos C y D no son comparables, ya que no están unidos por una línea ascendente.

28. Construir diagramas de Venn de los conjuntos A, B, C y D del diagrama lineal del Problema 27.

Solución:

Hagamos dos diagramas posibles:



La principal diferencia entre estos diagramas es que los conjuntos C y D aparecen disjuntos en el segundo diagrama. Pero ambos tienen el mismo diagrama lineal

29. ¿Qué significa el símbolo $\{\{2, 3\}\}$?

Solución:

Se trata de un conjunto que tiene un elemento, el conjunto de los elementos 2 y 3. Obsérvese que $\{2, 3\}$ pertenece a $\{\{2, 3\}\}$, no es un subconjunto de $\{\{2, 3\}\}$ Así que se puede decir que $\{\{2, 3\}\}$ es un conjunto de conjuntos

30. Dado $A = \{2, \{4, 5\}, 4\}$, ¿qué afirmaciones son incorrectas y por qué?

(1) $\{4, 5\} \subset A$ (2) $\{4, 5\} \in A$ (3) $\{\{4, 5\}\} \subset A$

Solución:

Los elementos de A son 2, 4 y el conjunto $\{4, 5\}$ Por tanto, (2) es correcta y (1) es incorrecta (3) es una afirmación correcta porque el conjunto que consta del único elemento $\{4, 5\}$ es un subconjunto de A

31. Dado $E = \{2, \{4, 5\}, 4\}$, ¿qué afirmaciones son incorrectas y por qué?

(1) $5 \in E$ (2) $\{5\} \in E$ (3) $\{5\} \subset E$

Solución:

Todas son incorrectas. Los elementos de E son 2, 4 y el conjunto $\{4, 5\}$; por tanto, (1) y (2) son incorrectas. Hay ocho subconjuntos de E y $\{5\}$ no está entre ellos, de modo que (3) es incorrecta

32. Hallar el conjunto potencia 2^S del conjunto $S = \{3, \{1, 4\}\}$.

Solución:

Observar primero que S contiene dos elementos, 3 y el conjunto $\{1, 4\}$ Por tanto, 2^S contiene $2^2 = 4$ elementos: S mismo, el conjunto vacío, $\{3\}$ y el conjunto formado por $\{1, 4\}$ solo, es decir, $\{\{1, 4\}\}$ Más breve:

$$2^S = \{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \emptyset\}$$

33. En lo que sigue, ¿qué es lo que no se define en un desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos?: (1) conjunto, (2) subconjunto de, (3) disjunto, (4) elemento, (5) es igual a, (6) pertenece a, (7) superconjunto de.

Solución:

Los únicos conceptos no definidos en la teoría de conjuntos son conjunto, elemento y la relación «pertenece a», o sea (1), (4) y (6).

34. *Demostrar: Sean A y B no vacíos, esto es, $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$. Si A y B son disjuntos, entonces A y B no son comparables.*

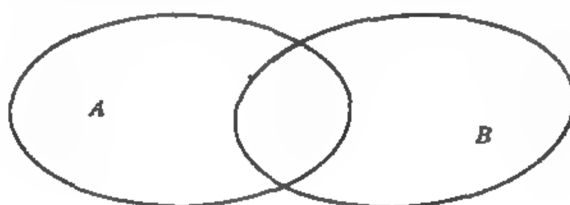
Solución:

Como A y B no son vacíos, hay elementos $a \in A$ y $b \in B$. Por otra parte, como A y B son disjuntos, $a \notin B$ y $b \notin A$. Por tanto, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$, es decir, A y B no son comparables.

35. Dados A y B no comparables, ¿se sigue que A y B son disjuntos?

Solución:

No. Los conjuntos del siguiente diagrama de Venn no son comparables, pero tampoco son disjuntos.



Problemas propuestos

NOTACION

36. Escribir en notación conjuntista:

(1) R es un superconjunto de T.
(2) x es elemento de Y.
(3) M no es subconjunto de S.
(4) El conjunto potencia de W.
(5) z no pertenece a A.
(6) B está incluido en F.
(7) El conjunto vacío.
(8) R pertenece a $\mathscr{A}$.

37. Enunciar verbalmente:

(1) $A = \{x \mid x \text{ vive en París}\}$.
(2) $B = \{x \mid x \text{ habla danés}\}$.
(3) $C = \{x \mid x \text{ es mayor de 21 años}\}$.
(4) $D = \{x \mid x \text{ es ciudadano francés}\}$.

38. Escribir en forma tabular:

(1) $P = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$.
(2) $Q = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra «calcular»}\}$.
(3) $R = \{x \mid x^2 = 9, x - 3 = 5\}$.
(4) $S = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$.
(5) $T = \{x \mid x \text{ es una cifra del número 2324}\}$.

39. Si $E = \{1, 0\}$, decir entre las afirmaciones siguientes cuáles son correctas o incorrectas:

(1) $\{0\} \in E$, (2) $\varnothing \in E$, (3) $\{0\} \subset E$, (4) $0 \in E$, (5) $0 \subset E$.

40. En una exposición axiomática de la teoría de conjuntos, decir cuáles de estos símbolos representan una relación no definida: (1) $\not\subset$, (2) $\in$, (3) $\supset$.

SUBCONJUNTOS

41. Si $B = \{0, 1, 2\}$, hallar todos los subconjuntos de B.

42. Si $F = \{0, \{1, 2\}\}$, hallar todos los subconjuntos de F.

43. Sean

$$A = \{2, 3, 4\} \qquad C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$$
$$B = \{x \mid x^2 = 4, \ x \text{ es positivo}\} \qquad D = \{x \mid x \text{ es par}\}$$

Completar las siguientes afirmaciones insertando $\subset$, $\supset$ o «nc» (no comparables) entre cada par de conjuntos:

(1) $A \ldots B$, (2) $A \ldots C$, (3) $B \ldots C$, (4) $A \ldots D$, (5) $B \ldots D$, (6) $C \ldots D$.

44. Sean $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$. ¿Cuáles conjuntos pueden ser iguales a X dadas las condiciones siguientes?

(1) X y B son disjuntos (3) $X \subset A$ y $X \not\subset C$
(2) $X \subset D$ y $X \not\subset B$. (4) $X \subset C$ y $X \not\subset A$

45. Decir si son correctas o incorrectas las siguientes afirmaciones:

(1) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
(2) Todo subconjunto de un conjunto infinito es infinito.

PROBLEMAS DIVERSOS

46. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos A, B, C y D del Problema 43.

47. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos A, B, C, D y E del Problema 44.

48. Entre las afirmaciones siguientes decir cuáles son correctas o incorrectas:

(1) $\{1, 4, 3\} = \{3, 4, 1\}$ (4) $\{4\} \subset \{\{4\}\}$
(2) $\{1, 3, 1, 2, 3, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ (5) $\emptyset \subset \{\{4\}\}$
(3) $\{4\} \in \{\{4\}\}$

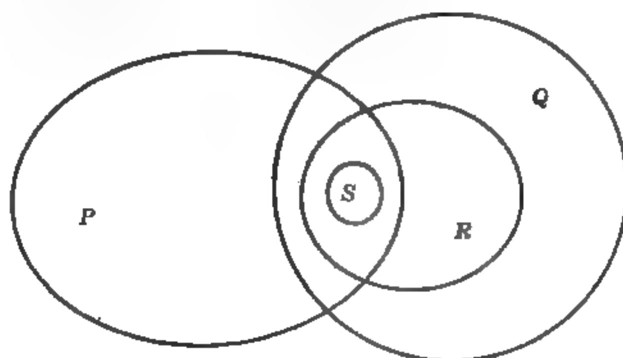
49. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son finitos o infinitos:

(1) El conjunto de rectas paralelas al eje x.
(2) El conjunto de letras del alfabeto.
(3) El conjunto de números que son múltiplos de 5.
(4) El conjunto de animales que viven en la Tierra.
(5) El conjunto de números que son raíces de la ecuación $x^{38} + 42x^{23} - 17x^{18} - 2x^5 + 19 = 0$.
(6) El conjunto de círculos que pasan por el origen $(0, 0)$.

50. Entre las afirmaciones siguientes decir cuál es correcta y cuál incorrecta. Aquí S es un conjunto cualquiera no vacío.

(1) $S \in 2^S$ (2) $S \subset 2^S$ (3) $\{S\} \in 2^S$ (4) $\{S\} \subset 2^S$

51. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos del siguiente diagrama de Venn.



Respuestas a los problemas propuestos

36. (1) $R \supset T$, (2) $x \in Y$, (3) $M \not\subset S$, (4) 2^W, (5) $z \notin A$, (6) $B \subset F$, (7) $\varnothing$, (8) $R \in \mathscr{A}$

37. (1) A es el conjunto de los x tales que x vive en París
(2) B es el conjunto de los x tales que x habla danés
(3) C es el conjunto de los x tales que x es mayor de 21 años.
(4) D es el conjunto de los x tales que x es ciudadano francés

38. (1) $P = \{2, \quad 1\}$, (2) $Q = \{a, c, l, u, r\}$, (3) $R = \varnothing$, (4) $S = \{a, e, i, o, u\}$, (5) $T = \{2, 3, 4\}$

39. (1) incorrecto, (2) incorrecto, (3) correcto, (4) correcto, (5) incorrecto.

40. El símbolo $\in$ representa una relación no definida

41. Hay ocho subconjuntos: B, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\varnothing$

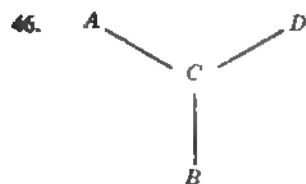
42. Hay cuatro subconjuntos: F, $\{0\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\varnothing$

43. (1) $\supset$, (2) $\supset$, (3) $\subset$, (4) nc, (5) $\subset$, (6) $\subset$

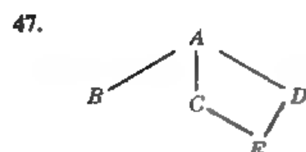
44. (1) C, E. (2) D, E. (3) A, B, D. (4) Ninguno

45. (1) correcto, (2) incorrecto.

46.



47.

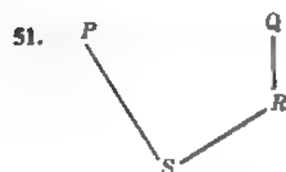


48. (1) correcto, (2) correcto, (3) correcto, (4) incorrecto, (5) correcto.

49. (1) infinito, (2) finito, (3) infinito, (4) finito, (5) finito, (6) infinito.

50. (1) correcto, (2) incorrecto, (3) incorrecto, (4) correcto.

51.



Capítulo 2

Operaciones fundamentales con conjuntos

OPERACIONES CON CONJUNTOS

En aritmética se suma, resta y multiplica, es decir, a cada par de números x e y se le asigna un número $x + y$ llamado suma de x e y, un número $x - y$ llamado diferencia de x e y y un número xy llamado producto de x e y. Estas asignaciones se llaman operaciones de adición, sustracción y multiplicación de números. En este capítulo se van a definir las operaciones de *unión*, *intersección* y *diferencia* de conjuntos, es decir, se van a asignar o a hacer corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B. En un capítulo posterior se verá que estas operaciones entre conjuntos se comportan de manera un tanto semejante a la de las anteriores operaciones con números.

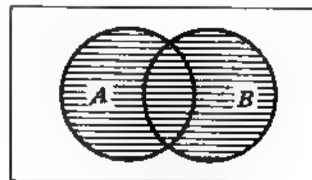
UNION

La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota la unión de A y B por

$$A \cup B$$

que se lee «A unión B».

Ejemplo 1-1: En el diagrama de Venn de la Figura 2-1, $A \cup B$ aparece rayado, o sea el área de A y el área de B.



$A \cup B$ a rayado

Fig. 2-1

Ejemplo 1-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Entonces

$$S \cup T = \{a, b, c, d, f, g\}$$

Ejemplo 1-3: Sean P el conjunto de los números reales positivos y Q el conjunto de los numeros reales negativos. $P \cup Q$, unión de P y Q, consiste en todos los números reales exceptuado el cero

La unión A y B se puede definir también concisamente así:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Observación 2-1: Se sigue inmediatamente de la definición de la unión de dos conjuntos que $A \cup B$ y $B \cup A$ son el mismo conjunto, esto es

$$A \cup B = B \cup A$$

Observación 2-2: A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$, es decir, que:

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{y} \quad B \subset (A \cup B)$$

En algunos libros la unión de A y B se denota por $A + B$ y se la llama suma conjuntista de A y B o simplemente A más B.

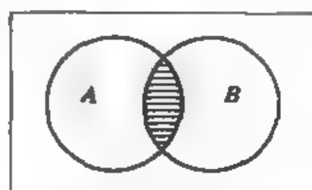
INTERSECCION

La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y B, esto es, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por

$$A \cap B$$

que se lee «A intersección B».

Ejemplo 2-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-2 se ha rayado $A \cap B$, el área común a ambos conjuntos A y B.



$A \cap B$ lo rayado

Fig. 2-2

Ejemplo 2-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Entonces

$$S \cap T = \{b, d\}$$

Ejemplo 2-3: Sea $V = \{2, 4, 6, \ldots\}$, es decir, los múltiplos de 2, y sea $W = \{3, 6, 9, \ldots\}$, o sean los múltiplos de 3. Entonces

$$V \cap W = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

La intersección de A y B también se puede definir concisamente así.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$$

Aquí la coma tiene el significado de «y».

Observación 2-3: Se sigue inmediatamente de la definición de intersección de dos conjuntos que

$$A \cap B = B \cap A$$

Observación 2-4: Cada uno de los conjuntos A y B contiene al $A \cap B$ como subconjunto, es decir,

$$(A \cap B) \subset A \text{ y } (A \cap B) \subset B$$

Observación 2-5: Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si A y B son disjuntos, entonces la intersección de A y B es el conjunto vacío, o sea $A \cap B = \emptyset$

En algunos libros, sobre todo de probabilidades, la intersección de A y B se denota por AB y se llama *producto conjuntista de A y B o simplemente A por B.*

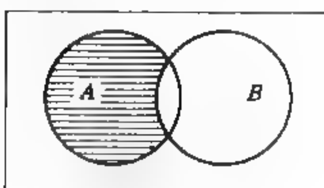
DIFERENCIA

La *diferencia* de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota la diferencia de A y B por

$$A - B$$

que se lee «A diferencia B» o simplemente «A menos B».

Ejemplo 3-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-3 se ha rayado $A - B$, el área de A que no es parte de B.



$A - B$ lo rayado
Fig. 2-3

Ejemplo 3-2: Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Se tiene:

$$S - T = \{a, c\}$$

Ejemplo 3-3: Sean R el conjunto de los números reales y Q el conjunto de los números racionales. Entonces $R - Q$ es el conjunto de los números irracionales.

La diferencia de A y B se puede también definir concisamente como

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Observación 2-6: El conjunto A contiene al $A - B$ como subconjunto, esto es:

$$(A - B) \subset A$$

Observación 2-7: Los conjuntos $(A - B)$, $A \cap B$ y $(B - A)$ son mutuamente disjuntos, es decir, la intersección de dos cualesquiera es vacía.

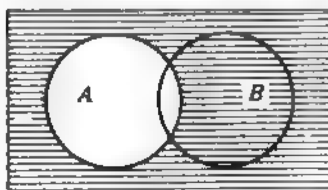
La diferencia de A y B se denota a veces por A/B o bien por $A \sim B$.

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir, la diferencia del conjunto universal U y del A. Se denota el complemento de A por

$$A'$$

Ejemplo 4-1: En el diagrama de Venn de la Fig. 2-4 se ha rayado el complemento de A, o sea el área exterior a A. Se supone que el conjunto universal U es el área del rectángulo



A' lo rayado
Fig. 2-4

Ejemplo 4-2: Suponiendo que el conjunto universal U sea el alfabeto, dado $T = \{a, b, c\}$, entonces

$$T' = \{d, e, f, \ldots, y, z\}$$

Ejemplo 4-3: Sea $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$, o sea los números pares. Entonces $E' = \{1, 3, 5, \ldots\}$, que son los impares. Aquí se supone que el conjunto universal es el de los números naturales, 1, 2, 3, ...

También se puede definir el complemento de A concisamente así:

$$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

o simplemente:

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

Lo que se establece en seguida resulta directamente de la definición del complemento de un conjunto.

Observación 2-8: La unión de cualquier conjunto A y su complemento A' es el conjunto universal, o sea que

$$A \cup A' = U$$

Por otra parte, el conjunto A y su complemento A' son disjuntos, es decir,

$$A \cap A' = \varnothing$$

Observación 2-9: El complemento del conjunto universal U es el conjunto vacío $\varnothing$, y viceversa, o sea que

$$U' = \varnothing \quad \text{y} \quad \varnothing' = U$$

Observación 2-10: El complemento del complemento de un conjunto A es el conjunto A mismo. Más breve:

$$(A')' = A$$

La siguiente observación muestra cómo la diferencia de dos conjuntos podría ser definida por el complemento de un conjunto y la intersección de dos conjuntos. En efecto, se tiene la siguiente relación fundamental.

Observación 2-11: La diferencia de A y B es igual a la intersección de A y el complemento de B, o sea:

$$A - B = A \cap B'$$

La demostración de la Observación 2-11 se sigue inmediatamente de las definiciones:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{x \mid x \in A, x \in B'\} = A \cap B'$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS COMPARABLES

Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento tienen propiedades sencillas cuando los conjuntos de que se trata son comparables. Se pueden demostrar los teoremas siguientes

Teorema 2-1: Sea A un subconjunto de B. Entonces la intersección de A y B es precisamente A, es decir:

$$A \subset B \text{ implica } A \cap B = A$$

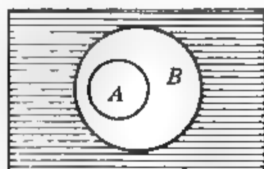
Teorema 2-2: Sea A un subconjunto de B. Entonces la unión de A y B es precisamente B, es decir:

$$A \subset B \text{ implica } A \cup B = B$$

Teorema 2-3: Sea A un subconjunto de B. Entonces B' es un subconjunto de A', es decir:

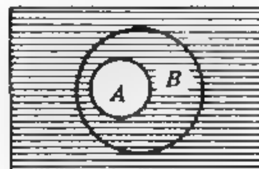
$$A \subset B \text{ implica } B' \subset A'$$

Se ilustra el Teorema 2-3 con los diagramas de Venn de las Figs. 2-5 y 2-6. Nótese que el área de B' está incluida en la de A'.



B' lo rayado

Fig. 2-5



A' lo rayado

Fig. 2-6

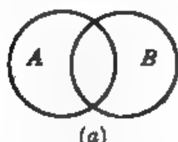
Teorema 2-4: Sea A un subconjunto de B. Entonces la unión de A y $(B - A)$ es precisamente B, es decir

$$A \subset B \text{ implica } A \cup (B - A) = B$$

Problemas resueltos

UNION

1. En los diagramas de Venn que siguen, rayar A unión B, o sea $A \cup B$:



(a)



(b)



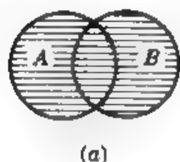
(c)



(d)

Solución:

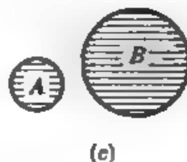
La unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se rayan entonces las áreas de A y de B como sigue:



(a)



(b)



(c)



(d)

$A \cup B$ lo rayado

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (*a*) $A \cup B$, (*b*) $A \cup C$, (*c*) $B \cup C$, (*d*) $B \cup B$.

Solución:

Para formar la unión de A y B se reúnen todos los elementos de A con todos los elementos de B. De modo que

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

De igual manera,

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$
$$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Nótese que $B \cup B$ es precisamente B.

3. Sean A, B y C los conjuntos del Problema 2. Hallar (1) $(A \cup B) \cup C$, (2) $A \cup (B \cup C)$.

Solución:

(1) Se determina primero $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. Entonces la unión de $A \cup B$ y C es

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$$

(2) Se determina primero $B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$. Entonces la unión de A y $B \cup C$ es

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$$

Nótese que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. Sean el conjunto X = {Tomás, Ricardo, Enrique}, el conjunto Y = {Tomás, Marcos, Emilio} y Z = {Marcos, Emilio, Eduardo}. Hallar (*a*) $X \cup Y$, (*b*) $Y \cup Z$, (*c*) $X \cup Z$.

Solución:

Para hallar $X \cup Y$ se hace la lista de los nombres de X con los nombres de Y; así

$X \cup Y$ = {Tomás, Ricardo, Enrique, Marcos, Emilio}

Del mismo modo $Y \cup Z$ = {Tomás, Marcos, Emilio, Eduardo}

$X \cup Z$ = {Tomás, Ricardo, Enrique, Marcos, Emilio, Eduardo}

5. Sean A y B dos conjuntos que no son comparables. Hacer el diagrama lineal de los conjuntos A, B y $A \cup B$.

Solución:

Nótese primeramente, según la Observación 2-2, que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$, es decir, que

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{y} \quad B \subset (A \cup B)$$

De acuerdo con esto, el diagrama lineal de A, B y $A \cup B$ es



6. Demostrar la Observación 2-2: A y B son subconjuntos de $A \cup B$.

Solución:

Puesto que $A \cup B = B \cup A$ solo se requiere demostrar que A es subconjunto de $A \cup B$, esto es, que $x \in A$ implica $x \in A \cup B$.

Sea x un elemento de A. Se sigue entonces que x es elemento de A o de B, es decir, que $x \in A \cup B$. Así que $A \subset (A \cup B)$.

7. Demostrar: $A = A \cup A$.

Solución:

Según la Definición 1-1, hay que demostrar que $A \subset (A \cup A)$ y que $(A \cup A) \subset A$. Según la Observación 2-2, $A \subset (A \cup A)$. Sea ahora un $x \in (A \cup A)$. Entonces, según la definición de unión, $x \in A$ o $x \in A$, así que x pertenece a A. Por tanto, $(A \cup A) \subset A$ y, por la Definición 1-1, $A = (A \cup A)$.

8. *Demostrar: $U \cup A = U$, donde U es el conjunto universal.*

Solución:

Por la Observación 2-2, $U \subset (U \cup A)$. Como todo conjunto es un subconjunto del conjunto universal, $(U \cup A) \subset U$ y la conclusión se sigue de la Definición 1-1.

9. Demostrar: $\varnothing \cup A = A$.

Solución:

Por la Observación 2-2, $A \subset (A \cup \varnothing)$. Sea ahora un $x \in (A \cup \varnothing)$, entonces $x \in A$ o $x \in \varnothing$. Por la definición de conjunto vacío, $x \notin \varnothing$, de modo que $x \in A$. Se ha demostrado que $x \in (A \cup \varnothing)$ implica $x \in A$, es decir, que $(A \cup \varnothing) \subset A$. Por la Definición 1-1, $A = \varnothing \cup A$.

10. Demostrar: $A \cup B = \varnothing$ implica $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$.

Solución:

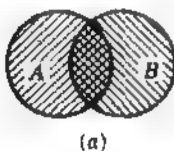
Por la Observación 2-2, $A \subset (A \cup B)$, es decir, $A \subset \varnothing$. Pero $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto; en particular, $\varnothing \subset A$. Luego, por la Definición 1-1, $A = \varnothing$. De igual manera se puede demostrar que $B = \varnothing$.

INTERSECCION

11. En los diagramas de Venn del Problema 1, rayar la intersección de A y B, esto es, de $A \cap B$.

Solución:

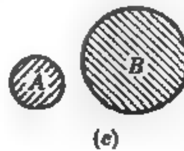
La intersección de A y B consiste en el área que es común tanto a A como a B. Para encontrar $A \cap B$, se raya primero A con trazos oblicuos hacia la derecha (////) y luego se raya B con trazos oblicuos inclinados a la izquierda (\\\\\\\\) *como se ve en la figura:*



(a)



(b)

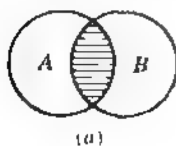


(c)



(d)

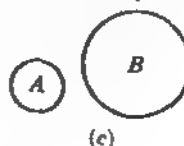
Entonces $A \cap B$ es el área que tiene los dos rayados. El resultado final, que es $A \cap B$, se raya ahora con líneas horizontales, como sigue:



(a)



(b)



(c)



(d)

$A \cap B$ lo rayado

Nótese que $A \cap B$ es vacía en (c) en que A y B son disjuntos.

12. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (*a*) $A \cap B$, (*b*) $A \cap C$, (*c*) $B \cap C$, (*d*) $B \cap B$.

Solución:

Para formar la intersección de A y B se inscriben todos los elementos comunes a A y B, así $A \cap B = \{2, 4\}$. De igual manera, $A \cap C = \{3, 4\}$, $B \cap C = \{4, 6\}$ y $B \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$. Nótese que $B \cap B$ es efectivamente B.

13. Sean A, B y C los conjuntos del Problema 12. Hallar (*a*) $(A \cap B) \cap C$, (*b*) $A \cap (B \cap C)$.

Solución:

(*a*) $A \cap B = \{2, 4\}$. Así que la intersección de $\{2, 4\}$ con C es $(A \cap B) \cap C = \{4\}$.

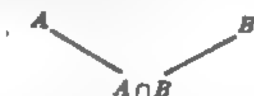
(*b*) $B \cap C = \{4, 6\}$. La intersección de este conjunto con el A es $\{4\}$, esto es, $A \cap (B \cap C) = \{4\}$

Nótese que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

14. Sean A y B dos conjuntos no comparables. Hacer el diagrama lineal de A, B y $A \cap B$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $A \cap B$ es un subconjunto tanto de A como de B, esto es, $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$. De acuerdo con esto se tiene el siguiente diagrama lineal:



15. Demostrar la Observación 2-4: $A \cap B$ es un subconjunto de A y de B.

Solución:

Sea x un elemento cualquiera de $A \cap B$. Por definición de la intersección, x pertenece a ambos conjuntos A y B; en particular, $x \in A$. Se ha demostrado que $x \in (A \cap B)$ implica $x \in A$, esto es, que $(A \cap B) \subset A$. De igual modo, $(A \cap B) \subset B$.

16. Demostrar: $A \cap A = A$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(A \cap A) \subset A$. Sea x un elemento cualquiera de A; entonces es obvio que x pertenece a los conjuntos A y A, es decir, x pertenece a $A \cap A$. Se demuestra así que $x \in A$ implica $x \in (A \cap A)$, es decir, que $A \subset (A \cap A)$. Por la Definición 1-1, $A \cap A = A$.

17. Demostrar: $U \cap A = A$, donde U es el conjunto universal.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(U \cap A) \subset A$. Sea x un elemento cualquiera de A. Como U es el conjunto universal x pertenece también a U. Como $x \in A$ y $x \in U$, por la definición de intersección, $x \in (U \cap A)$. Se ha demostrado que $x \in A$ implica $x \in (U \cap A)$, es decir, que se ha demostrado que $A \subset (U \cap A)$. Por la Definición 1-1, $U \cap A = A$.

18. Demostrar: $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Solución:

Por la Observación 2-4, $(A \cap \varnothing) \subset \varnothing$. Pero el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto; en particular, $\varnothing \subset A \cap \varnothing$. Por tanto, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

DIFERENCIA

19. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (*a*) $(A - B)$, (*b*) $(C - A)$, (*c*) $(B - C)$, (*d*) $(B - A)$, (*e*) $(B - B)$.

Solución:

(*a*) El conjunto $A - B$ consiste en los elementos de A que no están en B. Como $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $2, 4 \in B$, entonces $A - B = \{1, 3\}$.

(*b*) Los únicos elementos de C que no están en A son 5 y 6; por tanto, $C - A = \{5, 6\}$.

(*c*) $B - C = \{2, 8\}$. (*d*) $B - A = \{6, 8\}$. (*e*) $B - B = \varnothing$

20. **En los diagramas de Venn del Problema 1, rayar A menos B, o sea $A - B$.**

Solución:

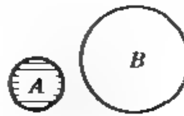
En cada caso el conjunto $A - B$ consiste en los elementos de A que no están en B, es decir, el área en A que no está en la de B.



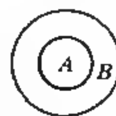
(a)



(b)



(c)



(d)

$A - B$ lo rayado

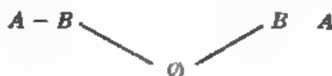
Nótese que, como en (c), $A - B = A$ si A y B son disjuntos. Nótese también que, como en (d), $A - B = \emptyset$ si A es subconjunto de B.

21. Dados dos conjuntos A y B no comparables, construir el diagrama lineal de los conjuntos A, B, $(A - B)$, $(B - A)$, $\emptyset$ y el universal U.

Solución:

Notar primero, según la Observación 2-6, que $(A - B) \subset A$ y que $(B - A) \subset B$.

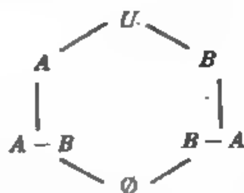
Como $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto y como, por la Observación 2-7, $(A - B)$ y $(B - A)$ no son comparables, se puede trazar primero



Como $A \supset (A - B)$ y $B \supset (B - A)$, se añaden A y B al diagrama como sigue:



Como U contiene a todo conjunto, se completa el diagrama así:



Si no se incluyera U o $\emptyset$ en el diagrama, entonces el diagrama lineal no se cerraría.

22. Demostrar la Observación 2-6: $(A - B) \subset A$.

Solución:

Sea x cualquier elemento del conjunto $A - B$. Por definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$; en particular, x pertenece a A. Se ha demostrado que $x \in (A - B)$ implica $x \in A$; es decir, que $(A - B) \subset A$.

23. Demostrar: $(A - B) \cap B = \emptyset$.

Solución:

Sea x perteneciente a $(A - B) \cap B$. Por la definición de intersección, $x \in (A - B)$ y $x \in B$. Pero por la definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$. Como no hay ningún elemento que cumpla $x \in B$ y $x \notin B$, entonces $(A - B) \cap B = \emptyset$.

COMPLEMENTO

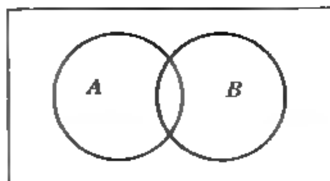
24. Sean $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Hallar (a) A', (b) B', (c) $(A \cap C)'$, (d) $(A \cup B)'$, (e) $(A')'$, (f) $(B - C)'$.

Solución:

(a) El conjunto A' consiste en los elementos que están en U pero no en A. Por tanto, $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

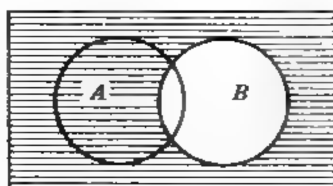
(*b*) El conjunto de los elementos de U que no están en B es $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(*c*) $(A \cap C) = \{3, 4\}$ y entonces $(A \cap C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
(*d*) $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y entonces $(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$.
(*e*) $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y entonces $(A')' = \{1, 2, 3, 4\}$, es decir, $(A')' = A$.
(*f*) $(B - C) = \{2, 8\}$ y entonces $(B - C)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

• **25.** En el diagrama de Venn siguiente, rayar (*a*) B', (*b*) $(A \cup B)'$, (*c*) $(B - A)'$, (*d*) $A' \cap B'$



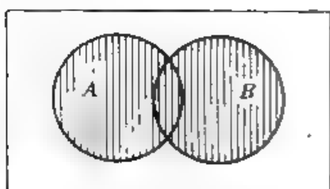
Solución:

(*a*) Como B', complemento de B, consta de los elementos que no están en B, se raya el área exterior a B

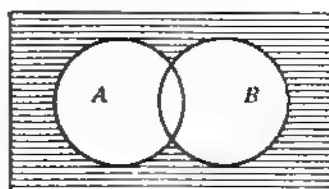


B' lo rayado

(*b*) Primero se raya el área $A \cup B$; luego, $(A \cup B)'$ es el área exterior a $(A \cup B)$

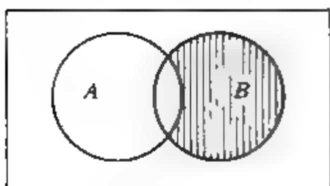


$A \cup B$ lo rayado

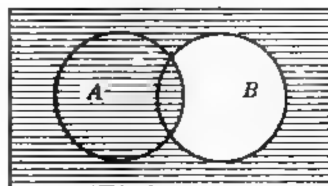


$(A \cup B)'$ lo rayado

(*c*) Primero se raya $B - A$; y así $(B - A)'$ es el área exterior a $B - A$.

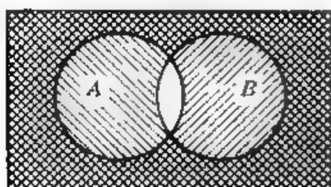


$B - A$ lo rayado

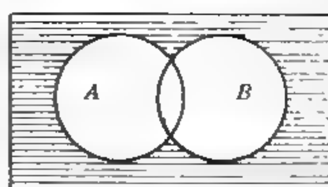


$(B - A)'$ lo rayado

(*d*) Primero se raya A', el área exterior a A, con trazos oblicuos inclinados a la derecha ( ) y se raya B' con trazos oblicuos inclinados a la izquierda (\\\\), entonces $A' \cap B'$ resulta ser el área con doble rayado.



A' y B' con doble rayado



$A' \cap B'$ lo rayado

Nótese que el área de $(A \cup B)'$ es la misma que la de $A' \cap B'$.

26. Demostrar el Teorema de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Solución:

Sea $x \in (A \cup B)'$; así, pues, x no pertenece a $A \cup B$. Por tanto, $x \notin A$ y $x \notin B$, es decir, $x \in A'$ y $x \in B'$ y, por la definición de intersección, x pertenece a $A' \cap B'$. Se ha demostrado que $x \in (A \cup B)'$ implica $x \in (A' \cap B')$ es decir, que

$$(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$$

Sea ahora $y \in A' \cap B'$, entonces y pertenece a A' e y pertenece a B'. Así que $y \notin A$ e $y \notin B$ y, por tanto, $y \notin A \cup B$, o sea que $y \in (A \cup B)'$. Queda demostrado que $y \in (A' \cap B')$ implica $y \in (A \cup B)'$, es decir, que

$$(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$$

Por consiguiente, por la Definición 1-1, $(A' \cap B') = (A \cup B)'$.

PROBLEMAS DIVERSOS

27. Sean $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{b, d, e\}$. Hallar (*a*) $A \cup B$, (*b*) $B \cap A$, (*c*) B', (*d*) $B - A$, (*e*) $A' \cap B$, (*f*) $A \cup B'$, (*g*) $A' \cap B'$, (*h*) $B' - A'$, (*i*) $(A \cap B')$, (*j*) $(A \cup B')$.

Solución:

(*a*) La unión de A y B consta de los elementos de A y los elementos de B, es decir, $A \cup B = \{a, b, d, e\}$

(*b*) La intersección de A y B consta de los elementos que son comunes a A y B, es decir, $A \cap B = \{b, d\}$

(*c*) El complemento de B consta de las letras que están en U pero no en B, así que $B' = \{a, c\}$

(*d*) El conjunto $B - A$ está formado por los elementos de B que no están en A, esto es, $B - A = \{e\}$

(*e*) $A' = \{c, e\}$ y $B = \{b, d, e\}$; así que $A' \cap B = \{e\}$.

(*f*) $A = \{a, b, d\}$ y $B' = \{a, c\}$; así que $A \cup B' = \{a, b, c, d\}$

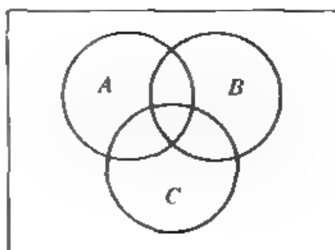
(*g*) $A' = \{c, e\}$ y $B' = \{a, c\}$; entonces $A' \cap B' = \{c\}$

(*h*) $B' - A' = \{a\}$.

(*i*) Según (*b*), $A \cap B = \{b, d\}$; luego $(A \cap B)' = \{a, c, e\}$.

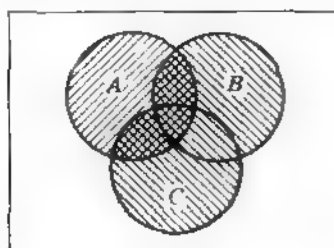
(*j*) Según (*a*), $A \cup B = \{a, b, d, e\}$; luego $(A \cup B)' = \{c\}$.

28. En el diagrama de Venn que sigue, rayar (1) $A \cap (B \cup C)$, (2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, (3) $A \cup (B \cap C)$, (4) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

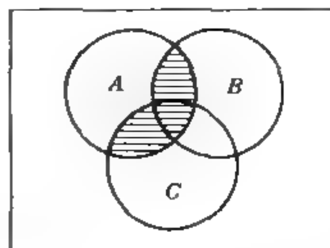


Solución:

(1) Primero rayar A con trazos inclinados a la derecha y rayar $B \cup C$ con trazos inclinados a la izquierda, entonces $A \cap (B \cup C)$ es el área con doble rayado.

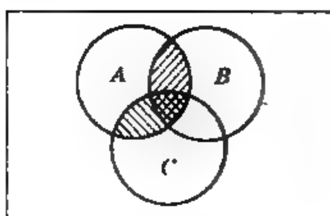


A y $B \cup C$ aparecen rayados

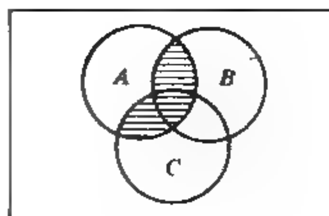


$A \cap (B \cup C)$ lo rayado

(2) Primero rayar $A \cap B$ con trazos inclinados a la derecha y $A \cap C$ con trazos inclinados a la izquierda, entonces $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ resulta ser el área total rayada como se muestra en seguida.



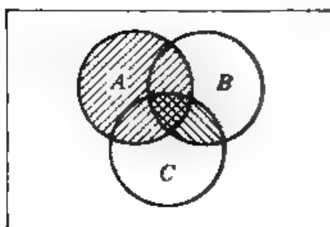
$A \cap B$ y $A \cap C$ lo rayado



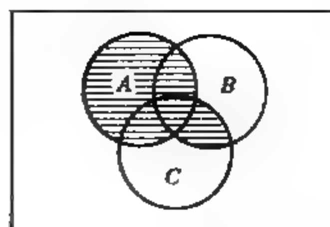
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ lo rayado

Nótese que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(3) Primero se raya A con trazos inclinados a la derecha y se raya $B \cap C$ con trazos inclinados a la izquierda; así resulta ser $A \cup (B \cap C)$ el área total rayada.

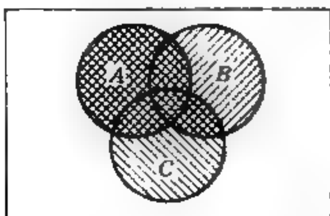


A y $B \cap C$ lo rayado

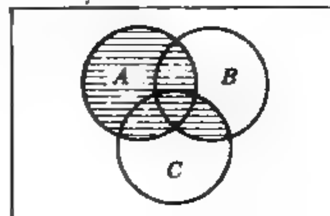


$A \cup (B \cap C)$ lo rayado

(4) Primero se raya $A \cup B$ con trazos inclinados a la derecha y se raya $A \cup C$ con trazos inclinados a la izquierda: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ es el área con doble rayado.



$A \cup B$ y $A \cup C$ lo rayado



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ lo rayado

Nótese que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

29. Demostrar: $B - A$ es un subconjunto de A'.

Solución:

Sea x perteneciente a $B - A$. Entonces $x \in B$ y $x \notin A$; por tanto, x es elemento de A'.

Como $x \notin B - A$ implica $x \in A'$, $B - A$ es subconjunto de A'.

30. Demostrar: $B - A' = B \cap A$.

Solución:

$B - A' = \{x : x \in B, x \notin A'\} = \{x : x \in B, x \in A\} = B \cap A$.

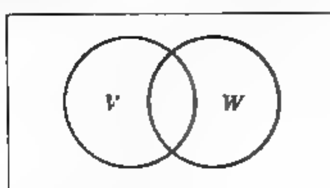
Problemas propuestos

31. Sea el conjunto universal $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, e, f, g\}$. Hallar:

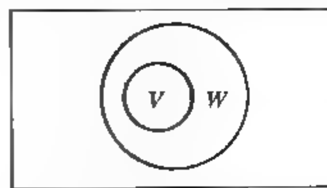
(1) $A \cup C$	(3) $C - B$	(5) $A' - B$	(7) $(A$ [illegible] $C)'$	(9) $(A - B')'$
(2) $B \cap A$	(4) B'	(6) $B' \cup C$	(8) $C' \cap A$	(10) $(A \cap A')'$

32. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subset B'$.

33. En los diagramas de Venn que siguen, rayar (1) $V \cap W$, (2) W', (3) $W - V$, (4) $V' \cup W$, (5) $V \cap W'$, (6) $V' - W'$.



(a)



(b)

34. Hacer un diagrama de Venn con tres conjuntos no vacíos A, B y C de modo que A, B y C tengan las siguientes características:

(1) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \emptyset$ (3) $A \subset C$, $A \neq C$, $B \cap C = \emptyset$
(2) $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \emptyset$ (4) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$

35. Determinar:

(1) $U \cap A$ (3) $\emptyset'$ (5) $A' \cap A$ (7) $U \cup A$ (9) $A \cap A$
(2) $A \cup A$ (4) $\emptyset \cup A$ (6) U' (8) $A' \cup A$ (10) $\emptyset \cap A$.

36. Completar las siguientes afirmaciones insertando $\subset$, $\supset$ o nc (no comparables) entre cada par de conjuntos. Aquí A y B son conjuntos arbitrarios.

(1) $A \ldots A - B$ (3) $A' \ldots B - A$ (5) $A' \ldots A - B$
(2) $A \ldots A \cap B$ (4) $A \ldots A \cup B$ (6) $A \ldots B - A$

37. La fórmula $A - B = A \cap B'$ puede definir la diferencia de dos conjuntos mediante las solas operaciones de intersección y complemento. Encontrar una fórmula que defina la unión de dos conjuntos, $A \cup B$, mediante estas dos operaciones de intersección y complemento.

38. Demostrar: $A - B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

39. Demostrar el Teorema 2-1: $A \subset B$ implica $A \cap B = A$.

40. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $B \cap A' = B$.

41. Demostrar el Teorema 2-2: $A \subset B$ implica $A \cup B = B$.

42. Demostrar: $A' - B' = B - A$.

43. Demostrar el Teorema 2-3: $A \subset B$ implica $B' \subset A'$.

44. Demostrar: Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B' = B'$.

45. Demostrar: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

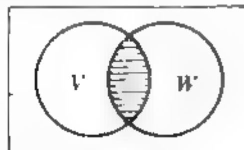
46. Demostrar el Teorema 2-4: $A \subset B$ implica $A \cup (B - A) = B$.

Respuestas a los problemas propuestos

31. (1) U (3) $\{b, f\}$ (5) $\{f\}$ (7) $C' = \{b, e, f, g\}$ (9) $\{b, d, f, g\}$
(2) $\{a, c, e\}$ (4) $\{b, d, f\}$ (6) $\{b, d, f, e, g\}$ (8) $\{a, c, d\}$ (10) U

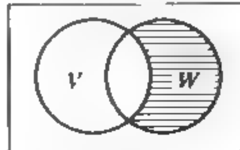
32. Demostración. Sea $x \in A$. Como A y B son disjuntos, $x \notin B$; luego x pertenece a B'. Queda demostrado que $x \in A$ implica $x \in B'$, es decir, que $A \subset B'$.

33. (a) (1)



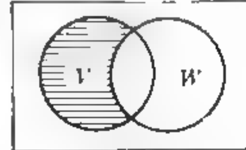
$V \cap W$ lo rayado

(3)



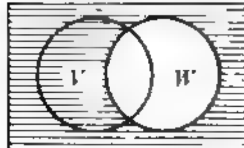
$W - V$ lo rayado

(5)



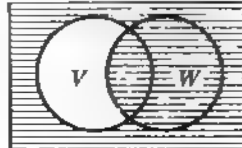
$V \cap W'$ lo rayado

(2)



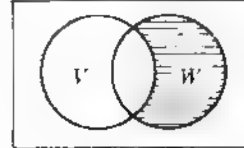
W' lo rayado

(4)

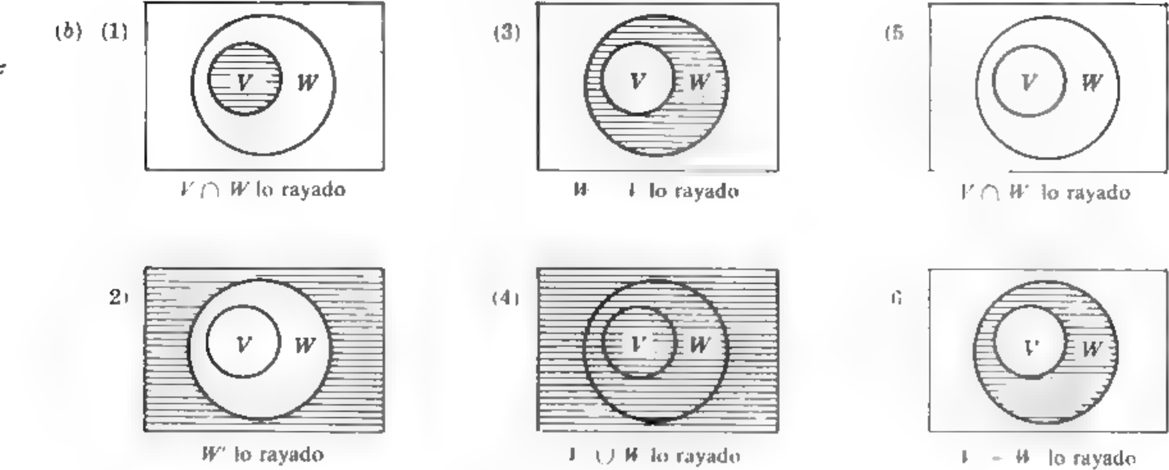


$V' \cup W$ lo rayado

(6)



$V' - W'$ lo rayado



(1) $V \cap W$ lo rayado (3) $W - V$ lo rayado (5) $V \cap W'$ lo rayado

(2) W' lo rayado (4) $V \cup W$ lo rayado (6) $V - W$ lo rayado

34.



35. (1) A (2) A (3) U (4) A (5) $\emptyset$ (6) $\emptyset$ (7) U (8) U (9) A (10) $\emptyset$

36. (1) $\supset$ (2) $\supset$ (3) $\supset$ (4) $\subset$ (5) nc (6) nc

37. $A \cup B = (A' \cap B')'$.

Capítulo 3

Conjuntos de números

CONJUNTOS DE NUMEROS

Aunque la teoria de conjuntos es completamente general, en la matemática elemental se encuentran ya conjuntos importantes que son conjuntos de números. De particular interés, en especial en el análisis, es el conjunto de los *números reales*, que se denota por

$$R$$

En este capítulo se supone de hecho, al menos que se diga otra cosa, que el conjunto universal es el conjunto de los números reales Se revisarán en primer lugar algunas propiedades elementales de los números reales antes de aplicar los principios fundamentales de la teoría de conjuntos a conjuntos de números. El conjunto de los números reales con sus propiedades se llama el *sistema de los números reales*.

NUMEROS REALES, R

Una de las propiedades más importantes de los números reales es el poderlos representar por puntos de una línea recta. Como en la Fig. 3-1, se elige un punto llamado origen, para representar el 0, y otro punto, por lo común a la derecha, para representar el 1. Resulta así de manera natural una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, es decir, que cada punto representa un número real único y que cada número real viene representado por un punto único. Llamando a esta recta la *recta real*, podran emplearse uno por otro los conceptos de punto y de número.

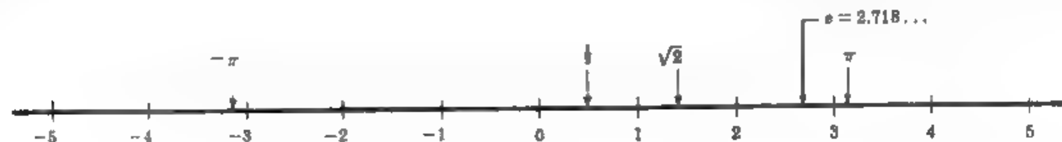


Fig. 3-1

Los números a la derecha del 0, o sea al mismo lado que el 1, son los llamados *numeros positivos*, y los números a la izquierda del 0 son los llamados *números negativos*. El 0 mismo no es ni positivo ni negativo.

ENTEROS, Z

Los *enteros* son los números reales

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se denotan los enteros por Z; así que se escribe

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,\}$$

Propiedad importante de los enteros es que son «*cerrados*» respecto de las operaciones de adición, multiplicación y sustracción; es decir, que la suma, producto y diferencia de dos enteros es a su vez un entero. Nótese que el cociente de dos enteros, por ejemplo, 3 y 7, no es necesariamente un entero, así que los enteros no son cerrados respecto de la operación división.

NUMEROS RACIONALES, Q

Los *números racionales* son los reales que se pueden expresar como razón de dos enteros. Se denota el conjunto de los números racionales por Q, así que,

$$Q = \{x \mid x = p/q \quad \text{donde} \quad p \in Z,\ q \in Z\}$$

Obsérvese que todo entero es un número racional, ya que, por ejemplo, $5 = 5/1$; por tanto, Z es un subconjunto de Q.

Los números racionales son cerrados no solo respecto de las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, sino también respecto de la división (excepto por 0). Es decir, que suma, producto, diferencia y cociente (excepto por 0) de dos números racionales es un número racional nuevamente.

NUMEROS NATURALES, N

Los *números naturales* son los enteros positivos. Se denota el conjunto de los números naturales por N; así que:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Los números naturales fueron el primer sistema de números que se formó y se les usaba primordialmente antes para contar. Nótense las relaciones siguientes entre los anteriores sistemas de números:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Los números naturales son cerrados respecto de las operaciones de adición y multiplicación solamente. La diferencia y el cociente de dos números naturales no es necesariamente un número natural.

Los *números primos* son los naturales p, excluido el 1, que solo son divisibles por 1 y por p mismo. He aquí los primeros números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

NUMEROS IRRACIONALES, Q'

Los números irracionales son los reales que no son racionales, esto es, el conjunto de los números irracionales es el complemento del conjunto de los números racionales Q en los numeros reales R; por eso se denotan los números irracionales por Q'. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{3}$, π, $\sqrt{2}$, etc.

DIAGRAMA LINEAL DE LOS SISTEMAS NUMERICOS

La Fig. 3-2 siguiente es un diagrama lineal de los distintos conjuntos de números vistos hasta ahora. (Para que quede completo, se incluye en el diagrama el conjunto de los números complejos, que son los de la forma $a + bi$, con a y b reales. Obsérvese que el conjunto de los números complejos es un superconjunto del conjunto de los números reales.)

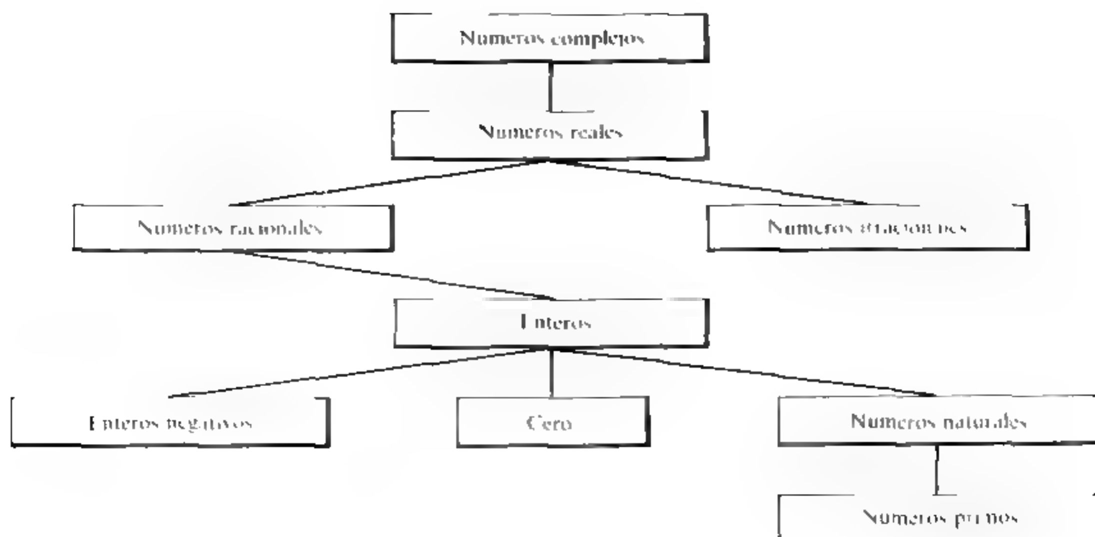


Fig. 3-2

DECIMALES Y NUMEROS REALES

Todo número real se puede representar por un «decimal con infinitas cifras». La representación decimal de un número racional p/q se encuentra «dividiendo el numerador p por el denominador q». Si la división dicha se acaba, como en

$$3/8 = 0.375$$

se escribe $\quad 3/8 = 0.375000\ldots$

o bien $\quad 3/8 = 0.374999\ldots$

Si la división p por q no acaba, se sabe entonces que hay un tramo de cifras que se repite continuamente; por ejemplo

$$2/11 = 0.181818\ldots$$

Ahora bien, lo que caracteriza a los números reales respecto de los decimales, es que en tanto que los numeros racionales corresponden precisamente a los decimales en que se repite continuamente un tramo de cifras, los números irracionales corresponden a los otros decimales de infinitas cifras.

DESIGUALDADES

Se introduce el concepto de «orden» en el sistema de los números reales por la

Definición: El número real a es *menor que* el número real b, lo que se escribe:

$$a < b$$

si $b - a$ es un número positivo.

Se pueden demostrar las propiedades siguientes de la relación $a < b$. Sean los números reales a, b y c; entonces

P_1: O bien $a < b$, o $a = b$, o $b < a$.
P_2: Si $a < b$, y $b < c$, entonces $a < c$.
P_3: Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
P_4: Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ac < bc$.
P_5: Si $a < b$ y c es negativo, entonces $bc < ac$.

Geométricamente, si $a < b$ el punto a sobre la recta real está a la izquierda del punto b.

También se indica $a < b$ por

$$b > a$$

lo que se lee «*b es mayor que a*». Asimismo, se escribe

$$a \le b \quad \text{o} \quad b \ge a$$

si $a < b$ o $a = b$, es decir, si a no es mayor que b.

Ejemplo 1-1: $2 < 5$; $-6 \le -3$ y $4 \le 4$; $5 > -8$.

Ejemplo 1-2: La notación $x < 5$ significa que x es un numero real menor que 5, así que x está a la izquierda de 5 en la recta real.

La notación $2 < x < 7$ significa $2 < x$ y $x < 7$; con lo que x estará entre 2 y 7 en la recta real.

Observación 3-1: Es de notar que el concepto de orden, o sea la relación $a < b$, se define mediante el concepto de número positivo. La propiedad fundamental de los números positivos que se utiliza para demostrar propiedades de la relación $a < b$, es que tales números son cerrados respecto de las operaciones de adición y multiplicación, hecho que, además, está ligado íntimamente al de que los números naturales también son cerrados respecto de las operaciones de adición y multiplicación.

Observación 3-2: Son ciertas las afirmaciones siguientes para a, b y c números reales cualesquiera:

(1) $a \le a$.
(2) Si $a \le b$ y $b \le a$ entonces $a = b$.
(3) Si $a \le b$ y $b \le c$ entonces $a \le c$.

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x, denotado por

$$|x|$$

se define así:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir, que si x es positivo o cero, entonces $|x|$ es igual a x, y si x es negativo, entonces $|x|$ es igual a $-x$. En consecuencia, el valor absoluto de cualquier número es siempre no negativo, esto es, $|x| \ge 0$ para todo $x \in R$.

Desde el punto de vista geométrico, el valor absoluto de x es la distancia del punto x de la recta real al origen, esto es, al punto 0. Asimismo, la distancia entre dos puntos cualesquiera, o sea entre dos números reales a y b, es $|a - b| = |b - a|$.

Ejemplo 2-1: $|-2| = 2$, $|7| = 7$, $|-\pi| = \pi$
$|3 - 8| = |-5| = 5$, $|8 - 3| = |5| = 5$, $|-3 - 4| = |-7| = 7$

Ejemplo 2-2: La relación

$$|x| < 5$$

significa que la distancia entre x y el origen es menor que 5, esto es, que x debe estar entre -5 y 5 sobre la recta real. Dicho de otro modo,

$$|x| < 5 \quad \text{y} \quad -5 < x < 5$$

tienen el mismo significado. De modo análogo

$$|x| \le 5 \quad \text{y} \quad -5 \le x \le 5$$

significan lo mismo.

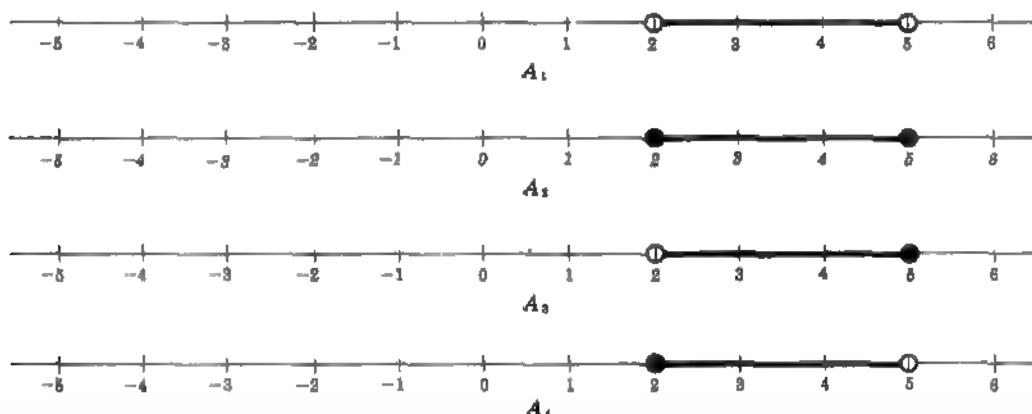
INTERVALOS

Examínense los siguientes conjuntos de números

$$A_1 = \{x : 2 < x < 5\}$$
$$A_2 = \{x : 2 \leq x \leq 5\}$$
$$A_3 = \{x : 2 < x \leq 5\}$$
$$A_4 = \{x : 2 \leq x < 5\}$$

Nótese que los cuatro conjuntos contienen solamente los puntos que están entre 2 y 5 con las excepciones posibles de 2 y o 5. Estos conjuntos se llaman intervalos y los números 2 y 5 son los extremos de cada intervalo. Por otra parte, A_1 es un *intervalo abierto*, pues no contiene los extremos; A_2 es un *intervalo cerrado*, ya que contiene ambos extremos, y A_3 y A_4 son *abierto-cerrado* y *cerrado-abierto*, respectivamente.

Se representan gráficamente estos conjuntos sobre la recta real como sigue:



Obsérvese que en cada diagrama se encierran con un círculo los extremos 2 y 5 y que se repinta el segmento entre los puntos dichos. Cuando un intervalo incluye un extremo, esto se hace ver llenando el círculo del extremo.

Como los intervalos aparecen con mucha frecuencia en las matemáticas, se emplea generalmente una notación abreviada para designar intervalos. Por ejemplo, los intervalos anteriores se denotan, a veces, por

$$A_1 =]2, 5[$$
$$A_2 = [2, 5]$$
$$A_3 =]2, 5]$$
$$A_4 = [2, 5[$$

Nótese que se usa un corchete al revés para designar un extremo abierto, es decir, un extremo que no pertenece al intervalo, y que se usa un corchete para designar un extremo cerrado.

PROPIEDADES DE LOS INTERVALOS

Sea $\mathscr{I}$ la familia de todos los intervalos de la recta real. Se incluyen en $\mathscr{I}$ el conjunto vacío $\emptyset$ y los puntos $a = [a, a]$. Tienen entonces los intervalos las propiedades siguientes:

(1) La intersección de dos intervalos es un intervalo, es decir

$$A \in \mathscr{I},\ B \in \mathscr{I} \text{ implica } A \cap B \in \mathscr{I}$$

(2) La unión de dos intervalos no disjuntos es un intervalo, es decir:

$$A \in \mathscr{I},\ B \in \mathscr{I},\ A \cap B \neq \emptyset \text{ implica } A \cup B \in \mathscr{I}$$

(3) La diferencia de dos intervalos no comparables es un intervalo, es decir:

$$A \in \mathscr{I},\ B \in \mathscr{I},\ A \not\subset B,\ B \not\subset A \text{ implica } A - B \in \mathscr{I}$$

Ejemplo 3-1: Sean $A = [2, 4)$, $B = (3, 8)$. Entonces

$$A \cap B = (3, 4), \qquad A \cup B = [2, 8[$$
$$A \setminus B = [2, 3] \qquad B \setminus A = [4, 8[$$

INTERVALOS INFINITOS

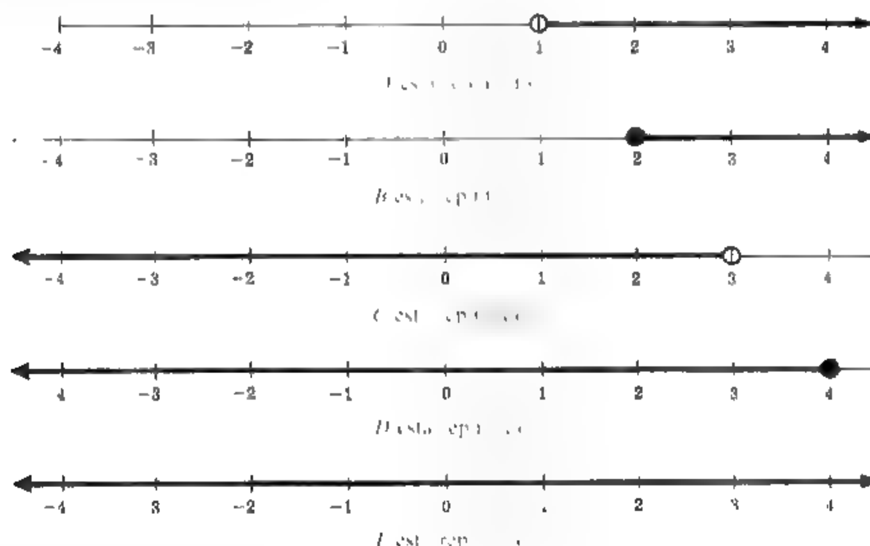
Los conjuntos de la forma

$$A = \{x : x > 1\},$$
$$B = \{x : x \geq 2\},$$
$$C = \{x : x < 3\},$$
$$D = \{x : x \leq 4\},$$
$$E = \{x : x \in R\}$$

se llaman *intervalos infinitos* y se les denota también por

$$A = (1, \infty), \quad B = [2, \infty[, \quad C = (-\infty, 3) \quad D =]-\infty, 4], \quad E = (-\infty, \infty)$$

Se representan estos intervalos infinitos sobre la recta real como sigue



CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

Sea A un conjunto de números; se dice que A es un conjunto *acotado* si A es subconjunto de un intervalo finito. Una definición equivalente de acotación es

Definición 3-1: El conjunto A es *acotado* si existe un número positivo M tal que

$$|x| \leq M$$

para todo $x \in A$. Un conjunto se dice *no acotado* si no es acotado.

Nótese que, entonces, A es un subconjunto del intervalo finito $[-M, M]$.

Ejemplo 4-1: Sea $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. A es acotado, pues es un subconjunto del intervalo cerrado $[0, 1]$.

Ejemplo 4-2: Sea $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. A es un conjunto no acotado.

Ejemplo 4-3: El conjunto $A = \{7, 350, -473, 2322, 42\}$ es acotado.

Observación 3-3: Si un conjunto A es finito, entonces es necesariamente acotado. Si un conjunto es infinito, puede ser acotado, como en el Ejemplo 4-1, o no acotado, como en el Ejemplo 4-2.

Problemas resueltos

CONJUNTOS DE NUMEROS

En los problemas siguientes, R, Q, Q', Z, N y P designan, respectivamente, los números reales, racionales, irracionales, enteros, naturales y primos.

1. Entre lo que sigue, decir qué es verdadero y qué falso.

(1) $-7 \in N$	(6) $-6 \in Q$	(11) $\sqrt[3]{8} \in N$
(2) $\sqrt{2} \in Q'$	(7) $11 \in P$	(12) $\sqrt{9/4} \in Q'$
(3) $4 \in Z$	(8) $\frac{1}{2} \in Z$	(13) $-2 \in Z$
(4) $9 \in P$	(9) $\sqrt{-5} \in Q'$	(14) $\pi^2 \in R$
(5) $3\pi \in Q$	(10) $1 \in R$	(15) $\sqrt{-4} \in R$

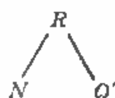
Solución:

(1) Falso. N sólo contiene los enteros positivos; -7 es negativo.
(2) Cierto. $\sqrt{2}$ no se puede expresar como razón de dos enteros, así que $\sqrt{2}$ no es racional.
(3) Cierto. Z, el conjunto de los enteros, contiene todos los enteros, positivos y negativos.
(4) Falso. 3 divide a 9, así que 9 no es primo.
(5) Falso. π no es racional ni tampoco 3π.
(6) Cierto. Los números racionales incluyen a los enteros. Así, $-6 = (-6/1)$.
(7) Cierto. 11 no tiene divisores excepto 11 y 1, así que 11 es primo.
(8) Falso. $\frac{1}{2}$ no es entero.
(9) Falso. $\sqrt{-5}$ no es un número real, por tanto, en particular, no es un número irracional.
(10) Cierto. 1 es un número real.
(11) Cierto. $\sqrt[3]{8} = 2$ que es un entero positivo.
(12) Falso. $\sqrt{9/4} = 3/2$ que es racional.
(13) Cierto. Z consta de los enteros positivos y negativos.
(14) Cierto. π es real y también lo es π^2.
(15) Falso. $\sqrt{-4} = 2i$ no es real.

2. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos R, N y Q'.

Solución:

N y Q' son ambos subconjuntos de R. Pero N y Q' no son comparables. Según esto, el diagrama lineal es



3. ¿A cuáles de los conjuntos R, Q, Q', Z, N y P pertenece cada uno de los números siguientes? (1) $-3/4$, (2) 13, (3) $\sqrt{-7}$.

Solución:

(1) $-3/4 \in Q$, de los números racionales, ya que es la razón de dos enteros -3 y 4. Asimismo, $-3/4 \in R$, ya que $Q \subset R$.
(2) $13 \in P$, porque los únicos divisores de 13 son 13 y 1. 13 pertenece también a N, Z, Q y R, pues P es subconjunto de cada uno de éstos.
(3) $\sqrt{-7}$ no es un número real; así, pues, no pertenece a ninguno de los conjuntos dados.

4. Dados $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ y $F = \{1, 3, 5, \ldots\}$, ¿son E y F cerrados respecto de las operaciones de (1) adición, (2) multiplicación?

Solución:

(1) La suma de dos números pares es par, por tanto, E es cerrado respecto de la operación adición. La suma de dos números impares no es impar; luego F no es cerrado respecto de la operación de adición.
(2) El producto de dos números pares es par, y el producto de dos números impares es impar; luego ambos E y F son cerrados respecto de la operación multiplicación.

5. De los conjuntos R, Q, Q', Z, N y P, ¿cuales no son cerrados respecto de las operaciones de (1) adición, (2) sustracción?

Solución:

(1) Q' y P. Por ejemplo, $-\sqrt{2} \in Q'$ y $\sqrt{2} \in Q'$, pero $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \notin Q'$; $3 \in P$ y $5 \in P$, pero $3 + 5 = 8 \notin P$

(2) Q', N y P. Por ejemplo, $\sqrt{2} \in Q'$, pero $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin Q'$, $3 \in N$ y $7 \in N$, pero $3 - 7 = -4 \notin N$, $7 \in P$ y $3 \in P$, pero $7 - 3 = 4 \notin P$

DESIGUALDADES Y VALORES ABSOLUTOS

6. Valiéndose de la notacion, escribir las afirmaciones siguientes:

(1) a es menor que b.
(2) a no es mayor o igual que b.
(3) a es menor o igual que b.
(4) a no es menor que b
(5) a es mayor o igual que b
(6) a no es mayor que b

Solución:

Recuerdese que un trazo vertical u oblicuo que atraviesa un signo indica el significado opuesto del signo Se escribe

(1) $a < b$, (2) $a \not\geq b$, (3) $a \leq b$, (4) $a \not< b$, (5) $a \geq b$, (6) $a \not> b$

7. Insertar entre los siguientes pares de numeros el signo adecuado: <, > o =

(1) $3 \ldots -9$ (3) $3^2 \ldots 7$ (5) $3^2 \ldots 9$

(2) $-4 \ldots -8$ (4) $-5 \ldots 3$ (6) $-\pi \ldots \pi/2$

Solución:

Se escribe $a < b$ si $b - a$ es positivo, $a > b$ si $b - a$ es negativo y $a = b$ si $b - a = 0$ Entonces

(1) $3 > -9$, (2) $-4 > -8$, (3) $3^2 > 7$, (4) $-5 < 3$, (5) $3^2 = 9$, (6) $-\pi < \pi/2$

8. Demostrar: Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$

Solución:

Por definicion, $a < b$ y $b < c$ significan que $c - b$ es positivo y que $b - a$ tambien lo es Como la suma de dos numeros positivos es positiva,

$$(b - a) + (c - b) = c - a$$

es positivo Asi que, por definicion, $a < c$

9. Demostrar: Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Solución:

Observese que

$$(b + c) - (a + c) = b - a$$

que, por hipótesis, es positivo. Entonces $a + c < b + c$

10. Escribir las siguientes relaciones geométricas entre numeros reales con la notacion de las desigualdades:

(1) y está a la derecha de 8.
(2) z está a la izquierda de 0.
(3) x está entre -3 y 7.
(4) u está entre 5 y 1.

Solución:

Recuerdese que $a < b$ significa que a está a la izquierda de b sobre la recta real De acuerdo con esto,

(1) $y > 8$ o tambien $8 < y$.

(2) $z < 0$

(3) $-3 < x$ y $x < 7$, o más brevemente, $-3 < x < 7$

(4) $5 > u$ y $u > 1$, o bien $u < 5$ y $1 < u$. O tambien $1 < u < 5$. No es costumbre escribir $5 > u > 1$

11. Dar la definición precisa de la función valor absoluto, es decir, definir $|x|$.

Solución:

Por definición, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

12. Dado $|x| \leq 0$. Averiguar x.

Solución:

Téngase en cuenta que el valor absoluto de un número es siempre no negativo, es decir, que para todo numero x, $|x| \geq 0$. Por hipotesis, $|x| \leq 0$; por tanto, $|x| = 0$. Por consiguiente, $x = 0$.

13. Calcular:

(1) $|3 - 5|$ (6) $|-8| + |3 - 1|$

(2) $|-3 + 5|$ (7) $|2 - 5| - |4 - 7|$

(3) $|-3 - 5|$ (8) $13 + |-1 - 4| - 3 - |-8|$

(4) $|-2| - |-6|$ (9) $||-2| - |-6||$

(5) $|3 - 7| - |-5|$ (10) $|-|-5||$

Solución:

(1) $|3 - 5| = |-2| = 2$

(2) $|-3 + 5| = |2| = 2$

(3) $|-3 - 5| = |-8| = 8$

(4) $|-2| - |-6| = 2 - 6 = -4$

(5) $|3 - 7| - |-5| = |-4| - |-5| = 4 - 5 = -1$

(6) $|-8| + |3 - 1| = |-8| + |2| = 8 + 2 = 10$

(7) $|2 - 5| - |4 - 7| = |-3| - |-3| = 3 - 3 = 0$

(8) $13 + |-1 - 4| - 3 - |-8| = 13 + |-5| - 3 - |-8| = 13 + 5 - 3 - 8 = 7$

(9) $||-2| - |-6|| = |2 - 6| = |-4| = 4$

(10) $|-|-5|| = |-5| = 5$

14. Escribir de manera que x quede sola entre los signos de desigualdad:

(1) $3 < x - 4 < 8$ (3) $-9 < 3x < 12$ (5) $3 < 2x - 5 < 7$

(2) $-1 < x + 3 < 2$ (4) $-6 < -2x < 4$ (6) $-7 < -2x + 3 < 5$

Solución:

(1) Por P_3, súmese 4 a cada lado de $3 < x - 4 < 8$ pará tener $7 < x < 12$.

(2) Por P_3, sumar -3 a cada lado de $-1 < x + 3 < 2$ para tener $-4 < x < -1$.

(3) Por P_4, multiplicar cada lado de $-9 < 3x < 12$ por $\frac{1}{3}$ y se tiene $-3 < x < 4$.

(4) Por P_5, multiplicar cada lado de $-6 < -2x < 4$ por $-\frac{1}{2}$ invirtiendo las desigualdades, resulta $-2 < x < 3$.

(5) Sumar 5 a cada lado de $3 < 2x - 5 < 7$ con lo que resulta $8 < 2x < 12$. Ahora multiplicando por $\frac{1}{2}$ se tiene $4 < x < 6$.

(6) Sumar -3 a cada lado de $-7 < -2x + 3 < 5$ con lo que se obtiene $-10 < -2x < 2$. Ahora multiplicando por $-\frac{1}{2}$ se invierten las desigualdades y resulta $-1 < x < 5$.

15. Escribir sin el signo de valor absoluto:

(1) $|x| < 3$, (2) $|x - 2| < 5$, (3) $|2x + 3| < 7$.

Solución:

(1) $-3 < x < 3$

(2) $-5 < x - 2 < 5$ o $-3 < x < 7$

(3) $-7 < 2x + 3 < 7$ o $-10 < 2x < 4$ o $-5 < x < 2$

16. Escribir con el signo de valor absoluto: (1) $-2 < x < 6$, (2) $4 < x < 10$.

Solución:

Nótese primero que se escribe la desigualdad de modo que un numero y su negativo aparecen en los extremos de la desigualdad.

(1) Sumar -2 a cada lado de $-2 < x < 6$ y resulta

$$-4 < x - 2 < 4$$

lo que equivale a

$$|x - 2| < 4$$

(2) Sumar -7 a cada lado de $4 < x < 10$ y resulta

$$-3 < x - 7 < 3$$

que equivale a

$$|x - 7| < 3$$

17. Insertar el símbolo adecuado, $\leq$ o $\geq$, entre los siguientes pares de numeros.

(1) $1 \ldots -7$, (2) $-2 \ldots -9$, (3) $2^3 \ldots 8$, (4) $3 \ldots 7$, (5) $3^2 \ldots 9$, (6) $3^2 \ldots -11$

Solución:

Téngase en cuenta que $a \leq b$ es cierto si $a < b$ o si $a = b$, y que $a \geq b$ es cierto si $a > b$ o si $a = b$.

(1) $1 \geq -7$, ya que $1 > -7$
(2) $-2 \geq -9$, pues $-2 > -9$
(3) Tanto $2^3 \leq 8$ como $2^3 \geq 8$ son ciertos, ya que $2^3 = 8$
(4) $3 \leq 7$, puesto que $3 < 7$
(5) Tanto $3^2 \leq 9$ como $3^2 \geq 9$ son ciertos, porque $3^2 = 9$
(6) $3^2 \geq -11$, porque $3^2 > -11$

INTERVALOS

18. Escribir los intervalos siguientes en forma constructiva conjuntista.

(1) $M = [-3, 5[$, (2) $S =]3, 8[$, (3) $T = [0, 4]$, (4) $W =]-7, -2]$

Solución:

Recuérdese que el corchete invertido significa que el extremo no pertenece al intervalo, y que el corchete significa que el extremo pertenece al intervalo. Así, pues

$$M = \{x \mid -3 \leq x < 5\}$$
$$S = \{x \mid 3 < x < 8\}$$
$$T = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$$
$$W = \{x \mid -7 < x \leq -2\}$$

19. Representar los intervalos $R =]-1, 2]$, $S = [-2, 2[$, $T =]0, 1[$ y $W = [1, 3]$ sobre la recta real.

Solución:

Para representar R, señálese primero cada extremo suyo -1 y 2 con un círculo.



Como el extremo 2 pertenece a R, repintar el círculo que rodea el 2:

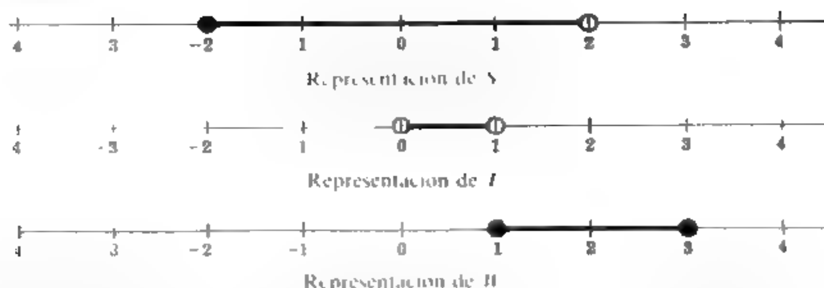


Por último, repíntese la recta entre los extremos.



Representación de R

De la misma manera,


Representación de S

Representación de I

Representación de H

20. Dados los números reales a y b, $a < b$, construir el diagrama lineal de los cuatro intervalos $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$ y $[a, b[$.

Solución:

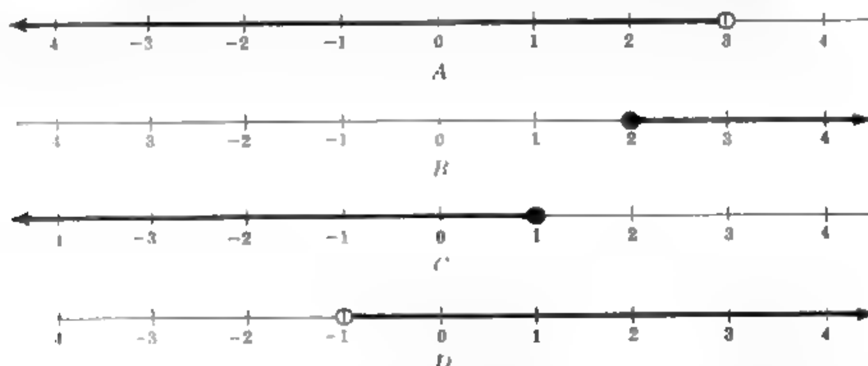
El intervalo abierto $]a, b[$ es un subconjunto de los dos intervalos semiabiertos $[a, b[$ y $]a, b]$ que, a su vez, son subconjuntos del intervalo cerrado $[a, b]$. Así, pues,



21. Sean $A = \{x \mid x < 3\}$, $B = \{x \mid x \geq 2\}$, $C = \{x \mid x \leq 1\}$ y $D = \{x \mid x > -1\}$. Representar los conjuntos sobre la recta real y escribir luego los conjuntos en notación de intervalos.

Solución:

Los conjuntos son todos intervalos infinitos. Enciérrese con un círculo el extremo y dibújese una semirrecta dirigida hacia el lado del extremo en que está el conjunto, como se muestra en seguida.



Con la notación de intervalos, los conjuntos se definen así: $A =]-\infty, 3[$, $B = [2, \infty[$, $C =]-\infty, 1]$ y $D =]-1, \infty[$. Nótese que se usa corchete al revés del lado del símbolo de infinito.

OPERACIONES CON INTERVALOS

22. Sean $A = [-3, 1[$ y $B = [-1, 2]$

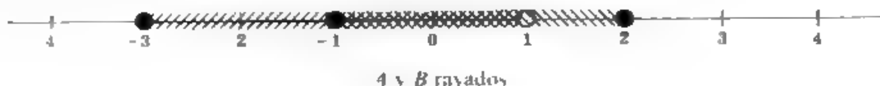
(1) Representar A y B sobre la misma recta real.

(2) Mediante (1), representar $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ sobre rectas reales.

(3) Escribir $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ en notación de intervalos.

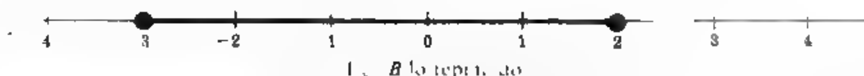
Solución:

(1) Sobre la recta real, rayar A con trazos inclinados a la derecha (////) y rayar B con trazos inclinados a la izquierda (\\\\).

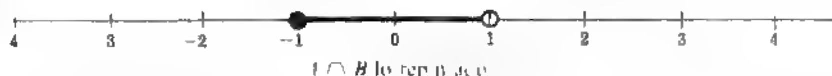


A y B rayados

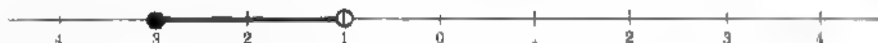
(2) $A \cup B$ contiene los puntos de cada intervalo, esto es, los puntos rayados en la figura



$A \cap B$ contiene solamente los puntos que están tanto en A como en B, o sea los puntos cubiertos con doble rayado.



$A - B$ contiene los puntos de A que no están en B, o sea los puntos rayados con pero fuera del doble rayado:



(3) Los gráficos anteriores indican que $A \cup B = [-3, 2]$, $A \cap B = [-1, 1[$ y $A - B = [-3, 1[$.

23. ¿En qué casos la unión de dos intervalos disjuntos es un intervalo?

Solución:

Primeramente, el extremo derecho de uno de los intervalos debe ser el extremo izquierdo del otro. En segundo lugar, en el extremo común uno de los intervalos debe ser cerrado y el otro abierto. Por ejemplo, sean $M = [-3, 4[$ y $N = [4, 7[$. El extremo derecho de M es el extremo izquierdo de N, y M es abierto en 4 en tanto que N es cerrado en 4. $M \cup N = [-3, 7[$ y $M \cap N = \varnothing$.

24. Dibujar sobre la recta real y escribir el conjunto que resulta en notación de intervalos:

(*a*) $\{x \mid x \geq -1\} \cap \{x \mid -3 < x < 2\}$
(*b*) $\{x \mid x < 2\} \cup \{x \mid x \geq 0\}$
(*c*) $\{x \mid -3 < x \leq 1\} \cap \{x \mid x > 2\}$
(*d*) $\{x \mid -2 < x \leq 3\} \cup \{x \mid x < 1\}$
(*e*) $\{x \mid -3 \leq x \leq 0\} \cap \{x \mid -2 < x < 3\}$

Solución:

En cada caso, representar el conjunto de la izquierda con trazos /// y el de la derecha con trazos \\\\\\.

(*a*)



La intersección abarca los puntos doblemente rayados, o sea el conjunto $[-1, 2[$.

(*b*)



La unión consta de todos los puntos rayados, estos forman el conjunto $]-\infty, \infty[$, toda la recta real.

(*c*)



La intersección es el conjunto vacío, ya que no hay puntos con doble rayado, es decir, no hay ningún punto que esté en ambos intervalos.

(*d*)



La unión es el intervalo infinito $]-\infty, 3]$.

(*e*)



La intersección es el conjunto de puntos con doble rayado, es decir, el conjunto $]-2, 0]$.

CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

25. Decir cuáles de los conjuntos que siguen son acotados o no acotados.

(*a*) $\{x : x < 3\}$ (*d*) $\{x : x$ es potencia positiva de $2\}$

(*b*) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ (*e*) $\{2, 5, 2, 5, \ldots\}$

(*c*) $\{2^{18}, 3^{14}, 5, 0, 8^{10}\}$ (*f*) $\{1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 1/4, \ldots\}$

Solución:

(*a*) Este conjunto no es acotado, pues hay numeros negativos cuyo valor absoluto es arbitrariamente grande. De hecho, este conjunto es un intervalo infinito $]-\infty, 3[$, que no puede estar contenido en un intervalo finito.

(*b*) Este conjunto, el de los números impares, no es acotado.

(*c*) Aunque los numeros de este conjunto son muy grandes, el conjunto es acotado, sin embargo, porque es finito. Se le puede acotar con el numero mayor.

(*d*) El conjunto de las potencias positivas de 2, que son 2, 4, 8, 16, . . . , es un conjunto no acotado.

(*e*) Como este conjunto contiene solamente los dos numeros 2 y 5, es acotado.

(*f*) Si bien en este conjunto hay un numero infinito de numeros, el conjunto es acotado, ya que ciertamente se contiene en el intervalo $[-1, 1]$.

26. Si dos conjuntos R y S son acotados, ¿que se puede decir de la union y de la interseccion de estos conjuntos?

Solución:

Tanto la union como la interseccion de conjuntos acotados son acotadas.

27. Si dos conjuntos R y S no son acotados, ¿que se puede decir de la union y de la intersección de estos conjuntos?

Solución:

La union de R y S debe ser no acotada, pero la intersección de R y S podria ser ya acotada, ya no acotada. Por ejemplo, si $R =]-\infty, 3]$ y $S = [-2, \infty[$, la intersección de estos intervalos infinitos es el intervalo finito y, por tanto, acotado, $[-2, 3]$. Pero si $R = [3, \infty[$ y $S = [-2, \infty[$, la interseccion resulta infinita y, por tanto, no acotada, es el intervalo $[3, \infty[$.

Problemas propuestos

CONJUNTOS DE NUMEROS

28. Entre lo que sigue decir que es cierto y que es falso.

(1) $-\pi \in Q$ (3) $-3 \in N$ (5) $7 \in P$ (7) $-5 \in Z$ (9) $15 \in P$ (11) $2/3 \in Z$

(2) $-3 \in Z$ (4) $\sqrt{-1} \in Q'$ (6) $\sqrt{9} \in N$ (8) $\sqrt{-3} \in R$ (10) $\sqrt{2} \in Q$ (12) $-2 \in Q$

29. Hacer un diagrama lineal de los conjuntos R, Z, Q' y P.

30. Entre los conjuntos R, Q, Q', Z, N y P, ¿cuales no son cerrados respecto de las operaciones de (1) multiplicación, (2) division (excepto por 0)?

31. Dados los conjuntos

$$A = \{x : x = 2^n, n \in N\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$$
$$B = \{x : x = 3n, n \in N\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$$
$$C = \{x : x = 3n, n \in Z\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$

¿cuales de estos conjuntos son cerrados respecto de la operacion de (1) adición, (2) sustraccion, (3) multiplicacion?

32. Entre lo que sigue, decir que es (*a*) siempre cierto, (*b*) cierto a veces, (*c*) nunca cierto. Aquí es $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

(1) $a \in Z$, $b \in Q$ y $a - b \in N$. (5) $a \in P$, $b \in P$ y $a + b \in P$.

(2) $a \in P$, $b \in Q'$ y $ab \in Q$. (6) $a \in N$, $b \in Q'$ y $a + b \in Q'$.

(3) $a \in N$, $b \in Z$ y $ab \in Z$. (7) $a \in Z$, $b \in Q$ y $a/b \in N$.

(4) $a \in N$, $b \in Q'$ y $a/b \in Q$. (8) $a \in P$, $b \in Z$ y $b/a \in Q$.

DESIGUALDADES Y VALORES ABSOLUTOS

33. Escribir las afirmaciones siguientes con la notación de orden:

(1) x no es mayor que y.
(2) El valor absoluto de x es menor que 4.
(3) r no es menor que t.
(4) r es mayor o igual que t.

34. Entre los siguientes pares de números insertar el símbolo correcto $<$, $>$ o $=$, siendo x un número real cualquiera

(1) $5 \ldots -8$
(2) $|x| \ldots -3$
(3) $2^3 \ldots 8$
(4) $-\pi \ldots \pi/3$
(5) $2^3 \ldots 19$
(6) $|-x| \ldots -1$
(7) $-7 \ldots -4$
(8) $-2 \ldots -5$

35. Escribir las relaciones geométricas entre los números utilizando la notación de las desigualdades

(1) a está a la derecha de b.
(2) x está a la izquierda de y.
(3) r está entre -5 y -8

36. Calcular

(1) $|4 - 7|$
(2) $|-4 - 7|$
(3) $|-4 + 7|$
(4) $|3 - |-5||$
(5) $|2 - 3| + |-6|$
(6) $|-2| + |1 - 5|$
(7) $|3 - 8| - |2 - 1|$
(8) $||-3| - |-9||$
(9) $||2 - 6| - |1 - 9||$

37. Escribir de modo que x quede sola entre los signos de desigualdad:

(1) $-2 < x - 3 < 4$
(2) $-5 < x + 2 < 1$
(3) $-12 < 4x < -8$
(4) $4 < -2x < 10$
(5) $-1 < 2x - 3 < 5$
(6) $-3 < 5 - 2x < 7$

38. Escribir sin el signo de valor absoluto:

(1) $|x| < 8$, (2) $|x - 3| < 8$, (3) $|2x + 4| < 8$.

39. Escribir con el signo de valor absoluto:

(1) $-3 < x < 9$, (2) $2 < x < 8$, (3) $-7 < x < -1$.

40. Demostrar P_5: Si $a < b$ y c es negativo, entonces $bc < ac$. (*Nota*: Se da por sentado que el producto de un número negativo y un número positivo es negativo.)

INTERVALOS

41. Escribir los siguientes intervalos en forma constructiva:

$A = [-3, 1[$, $B = [1, 2]$, $C =]-1, 3]$, $D =]-4, 2[$

42. Entre los conjuntos del Problema 41, ¿cuál es (1) un intervalo abierto, (2) un intervalo cerrado?

43. Representar los conjuntos del Problema 41 sobre la recta real.

44. Escribir los siguientes intervalos infinitos con la notación de intervalos:

$$R = \{x \mid x < 2\}, \quad S = \{x \mid x > -1\}, \quad T = \{x \mid x < -3\}$$

45. Representar los conjuntos del Problema 44 sobre la recta real.

46. Sean $A = [-4, 2[$, $B =]-1, 6[$, $C =]-\infty, 1]$. Hallar y escribir con notación de intervalos

(1) $A \cup B$
(2) $A \cap B$
(3) $A - B$
(4) $B - A$
(5) $A \cup C$
(6) $A \cap C$
(7) $A - C$
(8) $C - A$
(9) $B \cup C$
(10) $B \cap C$
(11) $B - C$
(12) $C - B$

CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

47. Escribir cada uno de los siguientes conjuntos en forma tabular y decir cuáles son acotados y cuáles no acotados.

$$E = \{x \mid x = (1/n),\ n \in N\} \qquad G = \{x \mid x = (\tfrac{1}{2})^n,\ n \in N\}$$
$$F = \{x \mid x = 3^n,\ n \in N\} \qquad H = \{x \mid x \in N,\ x < 2576\}$$

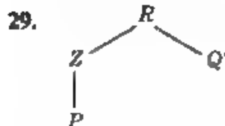
48. ¿Son las afirmaciones siguientes (*a*) siempre ciertas, (*b*) a veces ciertas, (*c*) nunca ciertas?

(1) Si A es finito, A es acotado.
(2) Si A es infinito, A es acotado.
(3) Si A es un subconjunto de $[-23, 79]$, A es finito.
(4) Si A es un subconjunto de $[-23, 79]$, A es no acotado.

Respuestas a los problemas propuestos

28. (1) F, (2) V, (3) F, (4) F, (5) V, (6) V, (7) V, (8) F, (9) F, (10) V, (11) F, (12) V

29.



30. (1) Q y P. (2) Q', Z, N y P.

31. (1) B y C. (2) C. (3) A, B y C.

32. (1) Cierto a veces. (2) Nunca cierto. (3) Siempre cierto. (4) Nunca cierto. (5) A veces cierto. (6) Siempre cierto. (7) A veces cierto. (8) Siempre cierto

33. (1) $x \not> y$ (2) $x < 4$ (3) $x \not< y$ (4) $x = t$

34. (1) > (2) > (3) = (4) < (5) < (6) < (7) < (8) >

35. (1) $a > b$ or $b < a$ (2) $x < y$ (3) $-8 < x < -5$

36. (1) 3 (2) 11 (3) 3 (4) −2 (5) 7 (6) 6 (7) 4 (8) 6 (9) 4

37. (1) $1 < x < 7$ (2) $-7 < x < -1$ (3) $-3 < x < -2$ (4) $-5 < x < 2$ (5) $1 < x < 4$ (6) $-1 < x < 4$

38. (1) $-8 < x < 8$ (2) $5 < x < 11$ (3) $-6 < x < 2$

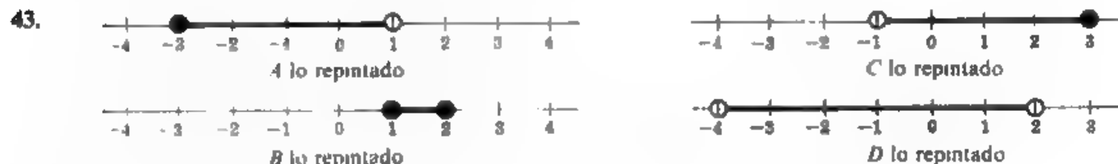
39. (1) $|x - 3| < 6$ (2) $|x - 5| < 3$ (3) $|x + 1| < 3$

40. Como $a < b$, $b - a$ es positivo Como c es negativo, el producto $(b - a)c = bc - ac$ es también negativo; luego $ac - bc$ es positivo, es decir, $bc < ac$.

41. $A = \{x \mid -3 \le x < 1\}$ $C = \{x \mid -1 < x \le 3\}$
$B = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$ $D = \{x \mid -4 < x < 2\}$

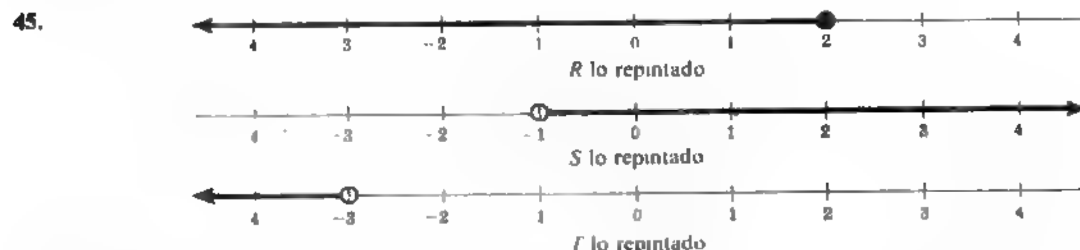
42. D es un intervalo abierto y B es un intervalo cerrado.

43.



44. $R =]-\infty, 2]$, $S =]-1, \infty[$, $T =]-\infty, -3[$

45.



46. $A \cup B = [-4, 6[$ $A \cup C =]-\infty, 2[$. $B \cup C =]-\infty, 6[$.
$A \cap B = [1, 2[$ $A \cap C = [-4, 1]$. $B \cap C =]-1, 1]$.
$A - B = [-4, 1[$ $A - C =]1, 2[$. $B - C =]1, 6[$.
$B - A = [2, 6[$ $C - A =]-\infty, -4[$. $C - B =]-\infty, -1]$

47. $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Acotado. $G = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$. Acotado.
$F = \{3, 9, 27, 81, \ldots\}$. No acotado. $H = \{1, 2, 3, \ldots, 2574, 2575\}$. Acotado

48. (1) Siempre cierta. (2) Cierta a veces. (3) Cierta a veces. (4) Nunca cierta

Capítulo 4

Funciones

DEFINICION DE FUNCION

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder de algun modo un elemento unico de un conjunto B, se dice que esa correspondencia es una *funcion*. Denotando esta correspondencia por f, se escribe

$$f : A \to B$$

que se lee «f es una funcion de A en B». El conjunto A se llama *dominio de definicion*† de la funcion f, y B se llama codominio‡ de f. Por otra parte, si $a \in A$ el elemento de B que le corresponde a a se llama *imagen* de a y se denota por

$$f(a)$$

que se lee «f de a».

He aqui unos cuantos ejemplos aclaratorios de funciones.

Ejemplo 1-1: Sea f el hacer corresponder a cada numero real su cuadrado, esto es, para cada numero real x sea $f(x) = x^2$. Dominio de definicion y codominio de f son ambos los numeros reales, de modo que se puede escribir

$$f : R \to R$$

La imagen de -3 es 9; se puede escribir tambien $f(-3) = 9$, o $f : -3 \to 9$.

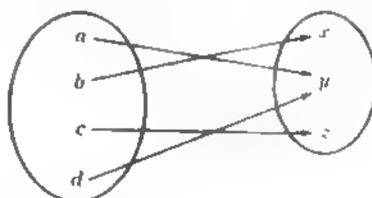
Ejemplo 1-2: Sea f el asignar a cada pais del mundo su ciudad capital. Aqui el dominio de f es el conjunto de paises del mundo; el codominio de f es el conjunto de ciudades capitales del mundo. La imagen de Francia es Paris, o sea que f(Francia) = Paris.

Ejemplo 1-3: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Definase una funcion f de A en B por la correspondencia $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = c$ y $f(d) = b$. Segun esta definicion, la imagen por ejemplo de b es c.

Ejemplo 1-4: Sea $A = \{1, -1\}$. Sea f la funcion que hace corresponder a cada numero racional de R el numero 1, y a cada numero irracional de R el numero -1. Entonces $f : R \to A$, y f se definiria concisamente

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Ejemplo 1-5: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z\}$, y $f : A \to B$ la definida por el diagrama



† En lo sucesivo se dira simplemente dominio en vez de dominio de definicion cuando no haya peligro de confusion.

‡ La nomenclatura mas generalizada hoy en dia es esta:

Dados dos conjuntos A, de «partida», y B, de «llegada», se llama funcion f de A en B, lo que se escribe $f : A \to B$, una relación que vincula a un elemento $x \in A$ un elemento único $y \in B$. Este elemento $y \in B$ se dice que «corresponde» al $x \in A$ y se llama imagen del x por la funcion f, cosa que se indica escribiendo $y = f(x)$.

El conjunto X de los elementos $x \in A$ que tienen imagen en B se llama *dominio de definicion* de la funcion f y es claro que $X \subset A$; en caso de ser $X = A$ se dice que la función es una aplicación de A en B.

El conjunto Y de los elementos $y \in B$ que son imagen de elementos $x \in A$ se llama *dominio de imagenes* de la funcion f y es claro que $Y \subset B$; si B es un conjunto de numeros se dice con preferencia que Y es el *dominio de valores* de f.

Dominio de definicion es, pues, lo que se llama dominio a secas en las obras inglesas (domain) y conjunto de llegada es alli el codominio (co-domain), en tanto que el dominio de imagenes o de valores es el llamado «ambito» (range) en estos libros. Las funciones inyectivas se decian antes biunivocas (one-one), calificacion hoy abandonada por no corresponder biunivoca a un sustantivo, lo que si ocurre con inyectiva, que corresponde a inyeccion; las sobreyectivas se llamaban funciones sobre (onto), con el mismo inconveniente. La nomenclatura expuesta en esta nota es bourbakista y es recomendable por su precision. No obstante, tengase en cuenta lo dicho aqui al leer obras inglesas o alemanas anteriores a 1955. La palabra aplicacion, por ejemplo, la usan algunos indistintamente con la palabra función; otros reservan funcion para las aplicaciones numericas.

Obsérvese que las funciones de los Ejemplos 1-1 y 1-4 vienen definidas por fórmulas características. Pero no siempre tiene que ser así, por lo que se ve en los otros ejemplos. Las reglas de correspondencia que definen las funciones pueden ser diagramas como en el Ejemplo 1-5, pueden ser geográficas como en el Ejemplo 1-2, o bien, cuando el dominio es finito, la correspondencia puede ser enunciada para cada elemento del dominio, como ocurre en el Ejemplo 1-3.

APLICACIONES, OPERADORES, TRANSFORMACIONES

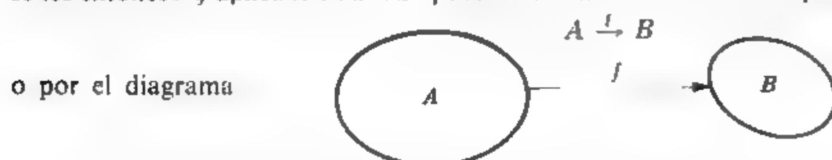
Si A y B son conjuntos en general, no necesariamente conjuntos de números, se dice por lo común que una función f de A en B es una aplicación de A en B; y la notación

$$f : A \to B$$

se lee entonces «f aplica A en B». Se puede simbolizar también una aplicación, o función, f de A en B por

$$A \xrightarrow{f} B$$

o por el diagrama



Si dominio y codominio de una función f son el mismo conjunto, por ejemplo,

$$f : A \to A$$

es frecuente entonces llamar a f *operador* o *transformación* sobre A. Como se verá luego, los operadores son casos especiales importantes de funciones.

FUNCIONES IGUALES

Si f y g son funciones definidas en el mismo dominio D y si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in D$, entonces las funciones f y g son iguales y se escribe

$$f = g$$

Ejemplo 2-1: Sea $f(x) = x^2$, siendo x un número real. Sea $g(x) = x^2$, siendo x un número complejo. Entonces f no es igual a g, pues tienen dominios diferentes.

Ejemplo 2-2: Sea la función f definida por el diagrama



Sea ahora una función g definida por la fórmula $g(x) = x^2$, siendo el dominio de g el conjunto $\{1, 2\}$. Entonces $f = g$, pues ambas tienen el mismo dominio de definición y tanto f como g asignan la misma imagen a cada elemento del dominio.

Ejemplo 2-3: Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$. Supóngase que f está definida por $f(x) = x^2$ y que g lo está por $g(y) = y^2$. Entonces f y g son funciones iguales, es decir, $f = g$. Obsérvese que x e y son simplemente variables mudas en las fórmulas que definen las funciones.

DOMINIO DE IMAGENES DE UNA FUNCION†

Sea f una aplicación de A en B, es decir, sea $f : A \to B$. No es preciso que todo elemento de B sea imagen de un elemento de A. Ahora bien, el conjunto de los elementos de B que son imágenes de un elemento de A por lo menos, se llama dominio de imágenes† de f. Se simboliza el dominio de imágenes de $f : A \to B$ por

$$f(A)$$

Es de observar que $f(A)$ es un subconjunto de B.

Ejemplo 3-1: Sea la función $f : R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^2$. El dominio de imágenes de f es el conjunto de los números positivos y el cero.

Ejemplo 3-2: Sea $f : A \to B$ la función del Ejemplo 1-3. Entonces $f(A) = \{b, c\}$.

† Cuando el codominio es un conjunto de números se dice con preferencia dominio de valores.

FUNCIONES INYECTIVAS†

Sea f una aplicación de A en B. Entonces f se dice *inyectiva* si elementos distintos de B corresponden a elementos distintos de A, es decir, si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas. Dicho brevemente, $f: A \to B$ es inyectiva si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$, o lo que es lo mismo, si $a \neq a'$ implica $f(a) \neq f(a')$.

Ejemplo 4-1: Sea la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^2$. f no es inyectiva, pues $f(2) = f(-2) = 4$, o sea que dos números reales diferentes, 2 y -2, tienen la misma imagen, el número 4.

Ejemplo 4-2: Sea la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^3$. f es una aplicación inyectiva puesto que los cubos de dos números reales distintos son distintos ellos mismos.

Ejemplo 4-3: La función f que asigna a cada país del mundo su ciudad capital es inyectiva, ya que países distintos tienen capitales diferentes, es decir, ninguna ciudad es la capital de dos países diferentes.

FUNCIONES SOBREYECTIVAS†

Sea f una función de A en B. El dominio de imágenes $f(A)$ de la función f es un subconjunto de B, esto es, $f(A) \subset B$. Si $f(A) = B$, es decir, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A, se dice entonces que «f es una función *sobreyectiva* de A en B» o que f es una función de A *sobre* B», o bien que «f aplica A *sobre* B».

Ejemplo 5-1: Sea la función $f: R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^2$. f no es sobreyectiva porque los números negativos no aparecen en el dominio de imágenes de f, esto es, ningún número negativo es cuadrado de un número real.

Ejemplo 5-2: Sea $f: A \to B$ la función del Ejemplo 1-3. Nótese que $f(A) = \{b, c\}$. Como $B = \{a, b, c\}$, el dominio de imágenes de f no es igual al codominio, es decir, f no es sobreyectiva.

Ejemplo 5-3: Sea $f: A \to B$ la función del Ejemplo 1-5. Nótese que

$$f(A) = \{x, y, z\} = B$$

esto es, que el dominio de imágenes de f es igual al codominio B. Así pues, f aplica A sobre B, o sea que f es una aplicación sobreyectiva.

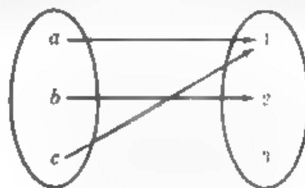
FUNCION IDENTICA

Sea A un conjunto cualquiera. La función $f: A \to A$, definida por $f(x) = x$, o sea la función f que hace corresponder a cada elemento de A el mismo elemento, se llama función idéntica o transformación idéntica sobre A. Se la denota por 1 o también por 1_A.

FUNCIONES CONSTANTES

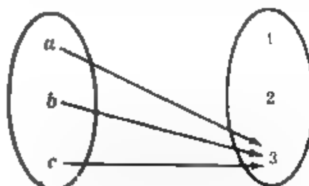
Una función f de A en B se llama función *constante* si a cada elemento de A se le asigna el mismo elemento $b \in B$. O dicho de otro modo: $f: A \to B$ es una función constante si el dominio de imágenes de f consta de un elemento solamente.

Ejemplo 6-1: Sea f la función definida por el diagrama



f no es entonces una función constante, pues el dominio de imágenes consta de los dos elementos 1 y 2.

Ejemplo 6-2: Sea f la función definida por el diagrama



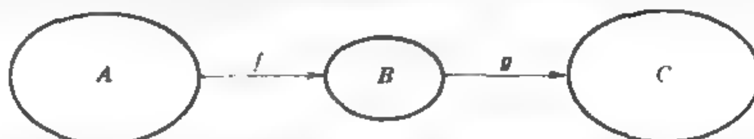
f es una función constante, puesto que 3 se le hace corresponder a todo elemento de A.

† Véase nota preliminar.

Ejemplo 6-3: Sea $f : R \to R$ definida por la fórmula $f(x) = 5$: f es una función constante, ya que a todo elemento le corresponde 5

FUNCION PRODUCTO COMPOSICION

Sea f una función de A en B y sea g una función de B, el codominio de f, en C, como se ilustra en seguida:



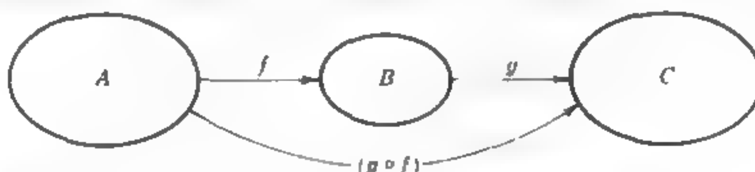
Sea $a \in A$; su imagen $f(a)$ está en B, que es el dominio de definición de g. De acuerdo con esto, se puede encontrar la imagen de $f(a)$ por la aplicación g, es decir, se puede hallar $g(f(a))$. Así se tiene, pues, que a cada elemento $a \in A$ se hace corresponder un elemento $g(f(a)) \in C$. En otras palabras, se tiene una función de A en C. Esta nueva función se llama *función producto composición*, o simplemente *función producto*† de f y g y se denota por

$$(g \circ f) \quad \text{o} \quad (gf)$$

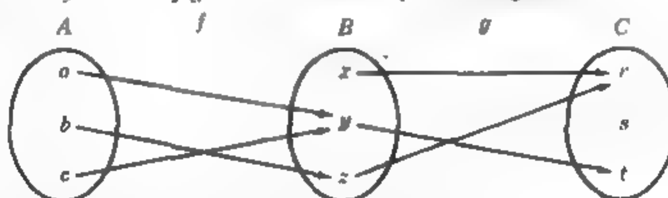
Más brevemente, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define una función $(g \circ f) : A \to C$ por

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Se usa aquí $\equiv$ para significar «igual por definición». Ahora se puede completar el diagrama:



Ejemplo 7-1: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definidas por los diagramas



Calculando $(g \circ f) : A \to C$ por la definición:

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a)) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) \equiv g(f(b)) = g(z) = r$$
$$(g \circ f)(c) \equiv g(f(c)) = g(y) = t$$

Nótese que la función $(g \circ f)$ es equivalente a «seguir la flecha» desde A a C en los diagramas de las funciones f y g.

Ejemplo 7-2: A cada número real hágasele corresponder por f su cuadrado, es decir, sea $f(x) = x^2$. Ahora a cada número real hágasele corresponder por g ese mismo número más 3, es decir, sea $g(x) = x + 3$. Entonces

$$(f \circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(5) = 25,$$
$$(g \circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(4) = 7$$

Nótese que las funciones producto $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$ no son la misma función. Calculando una fórmula general para estas funciones producto resulta:

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$
$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

Observación 4-1: Sea $f : A \to B$. Entonces

$$1_B \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ 1_A = f$$

o sea que el producto de cualquier función y la función idéntica es la función misma.

† O función compuesta, preferentemente.

ASOCIATIVIDAD DE PRODUCTOS DE FUNCIONES

Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$. Entonces, como se muestra en la Fig. 4-1, se pueden formar las funciones producto $(g \circ f): A \to C$, y la $h \circ (g \circ f): A \to D$.

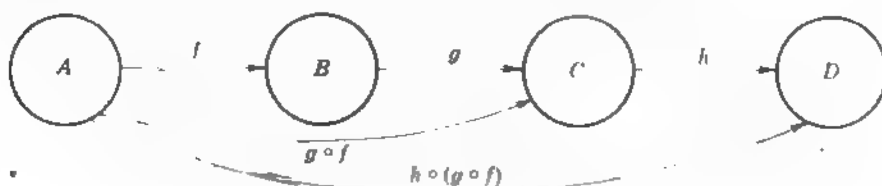


Fig. 4-1

Asimismo, como se ilustra en la Fig. 4-2, se puede formar la función producto $h \circ g: B \to D$ y luego la función $(h \circ g) \circ f: A \to D$

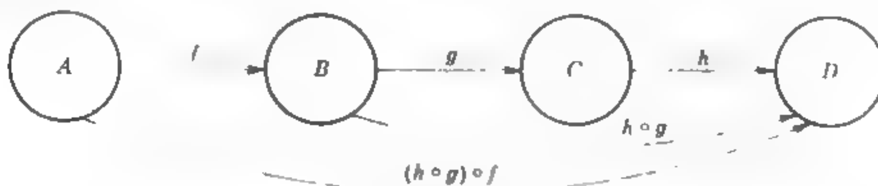


Fig. 4-2

Ambas $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ son funciones de A en D. Un teorema fundamental sobre las funciones afirma que estas funciones son iguales, a saber:

Teorema 4-1: Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$. Entonces

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

En vista de este Teorema 4-1, se puede escribir

$$h \circ g \circ f: A \to D$$

sin ningún paréntesis

IMAGEN RECIPROCA DE UNA FUNCION

Sea f una función de A en B, y sea $b \in B$. Entonces la *imagen recíproca* de b, que se denota por

$$f^{-1}(b)$$

consiste en los elementos de A que están aplicados sobre b, esto es, de aquellos elementos de A que tienen a b por imagen. Dicho más brevemente: si $f: A \to B$, entonces

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

Nótese que $f^{-1}(b)$ es siempre un subconjunto de A. Se lee f^{-1} «f recíproca».

Ejemplo 8-1: Sea la función $f: A \to B$ definida por el diagrama



Entonces $f^{-1}(x) = \{b, c\}$, pues tanto b como c tienen a x por imagen. Así también, $f^{-1}(y) = \{a\}$, ya que solo a se aplica en y. La recíproca de z, $f^{-1}(z)$, es el conjunto vacío $\emptyset$, ya que ningún elemento de A se aplica en z.

Ejemplo 8-2: Sea $f: R \to R$, siendo R los números reales, definida por la fórmula $f(x) = x^2$. Entonces $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$, puesto que 4 es la imagen de 2 y de -2 y no hay otro número real cuyo cuadrado sea cuatro. Nótese que $f^{-1}(-3) = \emptyset$, ya que no hay elemento de R cuyo cuadrado sea -3.

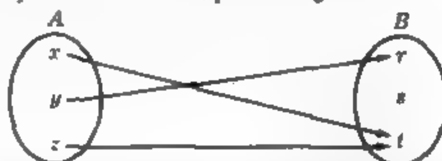
Ejemplo 8-3: Sea f una función de los números complejos en los números complejos, estando f definida por la fórmula $f(x) = x^2$. Entonces $f^{-1}(-3) = \{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i\}$, ya que el cuadrado de cada uno de estos números es -3.

Es de notar que las funciones de los Ejemplos 8-2 y 8-3 son diferentes a pesar de que estén definidas por la misma fórmula.

Generalizando ahora la definición de recíproca de una función, sea $f: A \to B$ y sea D un subconjunto de B, es decir, $D \subset B$. El conjunto de los elementos de A que se aplican sobre algún elemento de D es la recíproca de D por la aplicación f y se denota por $f^{-1}(D)$. Más brevemente:

$$f^{-1}(D) = \{x \mid x \in A, f(x) \in D\}$$

Ejemplo 9-1: Sea la función $f: A \to B$ definida por el diagrama



Aquí $f^{-1}(\{r, s\}) = \{y\}$, ya que solamente y se aplica en r o s. Del mismo modo $f^{-1}(\{r, t\}) = \{x, y, z\} = A$, pues todo elemento de A tiene por imagen r o t.

Ejemplo 9-2: Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$, y sea

$$D = [4, 9] = \{x \mid 4 \leq x \leq 9\}$$

Entonces

$$f^{-1}(D) = \{x \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ o } 2 \leq x \leq 3\}$$

Ejemplo 9-3: Sea $f: A \to B$ una función cualquiera. Aquí $f^{-1}(B) = A$, pues cada elemento de A tiene su imagen en B. Si $f(A)$ designa el dominio de imágenes de la función f, entonces

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

Además, si $b \in B$, entonces

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$$

Aquí f^{-1} tiene dos sentidos: como recíproca de un elemento de B y como recíproca de un subconjunto de B.

FUNCION RECIPROCA

Sea f una función de A en B. En general, $f^{-1}(b)$ puede tener más de un elemento o aún ser el conjunto vacío $\emptyset$. Ahora bien, si $f: A \to B$ es una función inyectiva y sobreyectiva, entonces para cada $b \in B$, la recíproca $f^{-1}(b)$ consta de un solo elemento de A. Se tiene entonces una correspondencia que asigna a cada $b \in B$ un elemento único $f^{-1}(b)$ de A. Así que, entonces, f^{-1} es una función de B en A y se puede escribir:

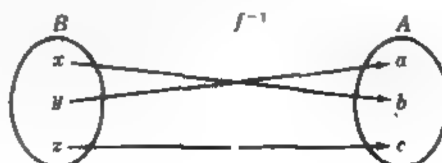
$$f^{-1}: B \to A$$

En este caso, cuando $f: A \to B$ es inyectiva y sobreyectiva†, f^{-1} se llama la función recíproca de la f.

Ejemplo 10-1: Sea la función $f: A \to B$ definida por el diagrama



Nótese que f es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, existe f^{-1}, la función recíproca. Se describe $f^{-1}: B \to A$ por el diagrama



† La función f se dice entonces biyectiva.

Nótese además que si se ponen las flechas en la dirección opuesta en el primer diagrama de f se tiene precisamente el diagrama de f^{-1}.

Ejemplo 10-2: Sea la función $f: A \to B$ definida por el diagrama

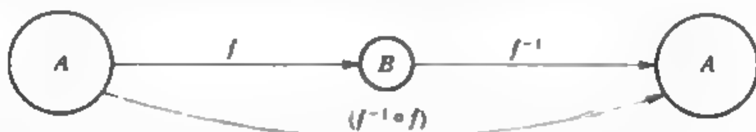


Como $f(a) = y$ y $f(c) = y$, la función f no es inyectiva. Así que la función recíproca f^{-1} no existe. Como $f^{-1}(y) = \{a, c\}$ no se pueden asignar a y c al elemento $y \in B$

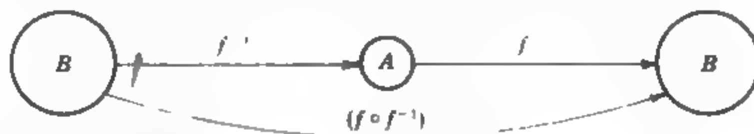
Ejemplo 10-3: Sea $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^3$. Nótese que f es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, $f^{-1}: R \to R$ existe. Se tiene ciertamente una fórmula que define la función recíproca, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

TEOREMAS SOBRE LA FUNCION RECIPROCA

Sea una función $f: A \to B$ que tiene una función recíproca $f^{-1}: B \to A$. Se ve entonces por el diagrama



que se puede formar la función producto de composición $(f^{-1} \circ f)$ que aplica A en A, y se ve por el diagrama



que se puede formar el producto de composición $(f \circ f^{-1})$ que aplica B en B. Los teoremas fundamentales sobre la función recíproca son:

Teorema 4-2: Sea la función $f: A \to B$ inyectiva y sobreyectiva, o sea que la función recíproca $f^{-1}: B \to A$ existe. Entonces el producto de composición

$$(f^{-1} \circ f): A \to A$$

es la función idéntica sobre A, y el producto de composición

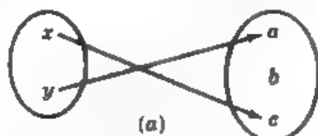
$$(f \circ f^{-1}): B \to B$$

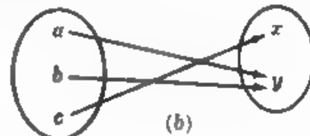
es la función idéntica sobre B.

Teorema 4-3: Sean $f: A \to B$ y $g: B \to A$. Si la función producto de composición $(g \circ f): A \to A$ es la función idéntica sobre A y si $(f \circ g): B \to B$ es la función idéntica sobre B, g es la función recíproca de f, es decir, $g = f^{-1}$.

Ambas condiciones son necesarias en el Teorema 4-3, como se ve en el

Ejemplo 11-1: Sean $A = \{x, y\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Defínase una función $f: A \to B$ por el diagrama (a) que sigue,





defínase una función $g: B \to A$ por el diagrama (b) anterior.

Calculando ahora $(g \circ f): A \to A$, se tiene

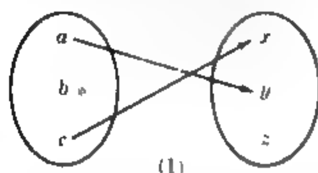
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(c) = x \qquad (g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(a) = y$$

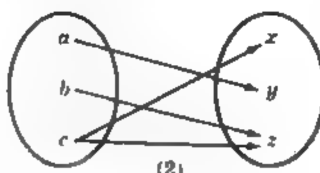
Por tanto, la función producto $(g \circ f)$ es la función idéntica sobre A. Pero g no es la función recíproca de f porque la función producto $(f \circ g)$ no es la función idéntica sobre B, ya que f no es una función sobreyectiva.

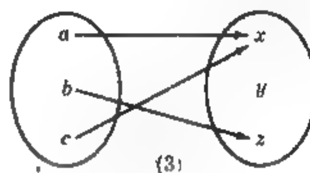
Problemas resueltos

DEFINICION DE FUNCION

1. En los diagramas que siguen, decir cuándo se define o no una función de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{x, y, z\}$.







Solución:

(1) No. Al elemento $b \in A$ no le corresponde nada

(2) No. Al elemento $c \in A$ le corresponden dos elementos, x y z; y en una función, a un elemento del dominio solo le puede corresponder un elemento.

(3) Sí. En una función bien puede el mismo elemento del codominio corresponder a más de un elemento del dominio.

2. Dar una fórmula para definir las siguientes funciones:

(1) A cada número real asignarle por f_1 su cubo.
(2) A cada número real asignarle por f_2 el número 5.
(3) Hacer corresponder a todo número positivo por f_3 su cuadrado, y a los otros números reales por f_3 el número 4.

Solución:

(1) La función f_1, que es una aplicación de R en R, queda definida por $f_1(x) = x^3$.

(2) Como f_2 atribuye el 5 a cada número, se puede definir por $f_2(x) = 5$.

(3) Ya que hay dos correspondencias diferentes para definir f_3, se define f_3 así:

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3. ¿Cuál de los enunciados que siguen es diferente de los otros y por qué?

(1) f es una función de A en B. (2) $f: A \to B$. (3) $f: x \to f(x)$. (4) $A \xrightarrow{f} B$. (5) f es una aplicación de A en B.

Solución:

(3) es diferente de los otros, pues no se dice allí cuál es el dominio y cuál el codominio, en tanto que en todos los otros se declara que A es el dominio y que B es el codominio.

4. Definida una función en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 8$ por $f(x) = x^2$, averiguar (1) $f(4)$, (2) $f(-3)$, (3) $f(t-3)$.

Solución:

(1) $f(4) = 4^2 = 16$

(2) $f(-3)$ carece de sentido, es decir, no está definida porque -3 no está en el dominio de la función.

(3) $f(t-3) = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$. Pero esta fórmula es cierta solamente cuando $t - 3$ pertenece al dominio, es decir, cuando $-2 \leq t - 3 \leq 8$. O sea que t debe cumplir $1 \leq t \leq 11$

5. Sea la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

(*a*) Expresar f verbalmente. (*b*) Hallar $f(\frac{1}{2})$, $f(\pi)$, $f(2{,}1313\ldots)$ y $f(\sqrt{2})$.

Solución:

(*a*) La función f asigna el número 1 a todo número racional y el número -1 a todo número irracional.

(*b*) Como $\frac{1}{2}$ es racional, $f(\frac{1}{2}) = 1$. Siendo π irracional, $f(\pi) = -1$. Como 2,1313 ... es un decimal periódico, que representa un número racional, $f(2{,}1313\ldots) = 1$. Y como $\sqrt{2}$ es irracional, $f(\sqrt{2}) = -1$.

6. Sea la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Hallar (*a*) $f(2)$, (*b*) $f(4)$, (*c*) $f(-1)$, (*d*) $f(-3)$.

Solución:

(*a*) Como 2 pertenece al intervalo cerrado $[-2, 3]$ vale la fórmula $f(x) = x^2 - 2$. Así que $f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

(*b*) Como 4 pertenece a $]3, \infty[$, vale la fórmula $f(x) = 3x - 1$. Así que $f(4) = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$

(*c*) Como -1 está en el intervalo $[-2, 3]$, se aplica la fórmula $f(x) = x^2 - 2$. Hecho el cálculo, $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

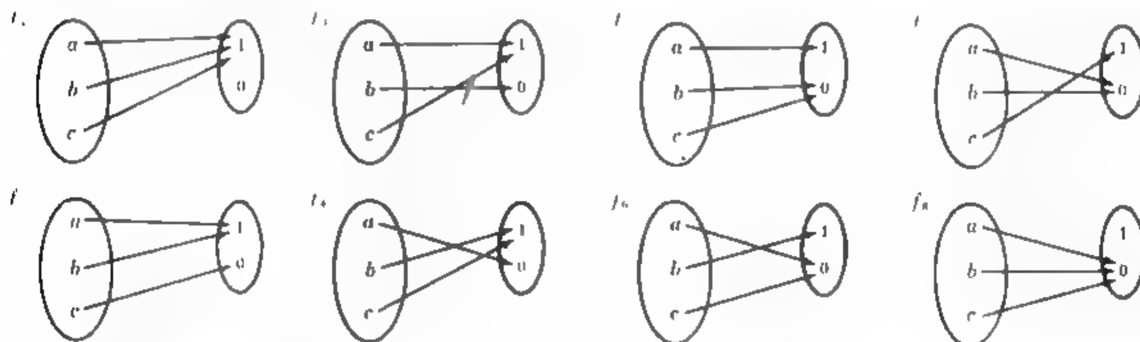
(*d*) Siendo -3 menor que -2, -3 pertenece al $]-\infty, -2[$ y se aplica la fórmula $f(x) = 2x + 3$. Así que entonces $f(-3) = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$

Nótese que solamente se ha definido una función f aunque se utilicen tres fórmulas para definir a f. No se ha de confundir fórmulas con funciones.

7. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 0\}$. ¿Cuántas funciones diferentes de A en B hay y cuáles son?

Solución:

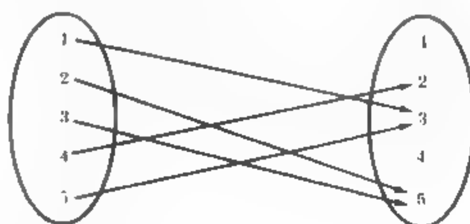
Representando con diagramas todas las funciones posibles de A en B se tiene asignando a cada elemento de A el 1 o el 0, pero no los dos:



Hay ocho funciones

DOMINIO DE IMAGENES DE UNA FUNCION

8. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definir una función $f: A \to A$ por el diagrama



¿Cuál es el dominio de imágenes de la función f?

Solución:

El dominio de imágenes consta de todos los puntos imagen. Como solo los números 2, 3 y 5 son imágenes, el dominio de imágenes de f es el conjunto $\{2, 3, 5\}$.

9. Con $W = \{a, b, c, d\}$, defínase una función f de W en W por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, $f(d) = a$. Hallar el dominio de imágenes de la función $f : W \to W$.

Solución:

Como el dominio de imágenes de f es el conjunto de elementos que son imágenes y solamente a y c aparecen como imágenes de elementos de W, entonces el dominio de imágenes de f es $\{a, c\}$.

10. Sean $V = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y la función $g : V \to R$ definida así

$$g(x) = x^2 + 1$$

Hallar el dominio de imágenes de g.

Solución:

Calculando la imagen de cada elemento de V:

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ g(-1) &= (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\ g(0) &= (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ g(1) &= (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\ g(2) &= (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

así que el dominio de imágenes (o de valores) de g es el conjunto $\{5, 2, 1, 2, 5\}$, es decir, el conjunto $\{5, 2, 1\}$.

11. Cada una de las siguientes fórmulas define una función de R en R. Determinar el dominio de valores de cada una

$$(1)\ f(x) = x^3, \qquad (2)\ g(x) = \operatorname{sen} x, \qquad (3)\ h(x) = x^2 + 1$$

Solución:

(1) Todo número real a tiene raíz cúbica real $\sqrt[3]{a}$; luego

$$f(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Es decir, el dominio de valores de f es todo el conjunto de los números reales.

(2) El seno de todo número real pertenece al intervalo cerrado $[-1, 1]$. O sea que todo número de este intervalo será el seno de algún número real. En consecuencia, el dominio de valores de g es el intervalo $[-1, 1]$.

(3) Sumando 1 al cuadrado de todo número real se tiene el conjunto de los números mayores o iguales que 1. O sea que el dominio de valores de h es el intervalo infinito $[1, \infty[$.

FUNCIONES IGUALES

12. Sean las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 de R en R definidas así:

(a) $f_1(x) = x^2$ (c) $f_3(z) = z^2$

(b) $f_2(y) = y^2$ (d) f_4 asignando a cada número real su cuadrado

Entre estas funciones, ¿cuáles son iguales?

Solución:

Todas son iguales entre sí. Las letras son simplemente variables mudas. Cada función asigna el mismo número a todo número real.

13. Sean las funciones f, g y h definidas por

(a) $f(x) = x^2$ donde $0 \le x \le 1$

(b) $g(y) = y^2$ donde $2 \le y \le 8$

(c) $h(z) = z^2$ donde $z \in R$

¿Cuáles de estas funciones son iguales?

Solución:

No las hay iguales. Si bien se enuncian las mismas correspondencias, los dominios son diferentes. Así que las funciones son distintas.

FUNCIONES INYECTIVAS

14. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y B el conjunto de letras del alfabeto. Definidas las funciones f, g y h de A en B por:

(1) $f(a) = r$, $f(b) = a$, $f(c) = s$, $f(d) = r$, $f(e) = e$

(2) $g(a) = a$, $g(b) = c$, $g(c) = e$, $g(d) = r$, $g(e) = s$

(3) $h(a) = z$, $h(b) = y$, $h(c) = x$, $h(d) = y$, $h(e) = z$.

Decir si son o no inyectivas.

Solución:

Téngase en cuenta que para una función ser inyectiva, distintos elementos del dominio han de tener distintas imágenes.

(1) f no es inyectiva puesto que asigna r tanto a a como a d, es decir, $f(a) = f(d) = r$.

(2) g es inyectiva.

(3) h no es inyectiva porque $h(a) = h(e)$.

15. Entre las siguientes funciones, decir cuáles son inyectivas y cuáles no.

(1) A cada persona que vive en la tierra asignarle el número de sus años.

(2) A cada país del mundo hacerle corresponder el número de sus habitantes.

(3) A todo libro escrito por un solo autor, asignarle el autor.

(4) A todo país del mundo que tiene primer ministro, hacerle corresponder su primer ministro.

Solución:

(1) Muchas personas tienen la misma edad, así que esta función no es inyectiva.

(2) Si bien es posible que dos países tengan la misma población, las estadísticas muestran hoy que esto no es así: así que esta función es inyectiva.

(3) Dos libros diferentes pueden ser del mismo autor, así que esta función no es inyectiva.

(4) Dos países distintos no pueden tener el mismo primer ministro: la función es inyectiva.

16. Sean $A = [-1, 1] = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = [1, 3]$ y $C = [-3, -1]$. Sean las funciones $f_1 : A \to R$, $f_2 : B \to R$ y $f_3 : C \to R$ definidas así: A cada número le corresponde su cuadrado. ¿Cuáles son inyectivas?

Solución:

La función $f_1 : A \to R$ no es inyectiva porque $f_1(\frac{1}{2}) = f_1(-\frac{1}{2})$, o sea que dos números distintos del dominio tienen la misma imagen.

La función $f_2 : B \to R$ es inyectiva porque los cuadrados de números positivos diferentes son diferentes.

Igualmente, $f_3 : C \to R$ es inyectiva porque los cuadrados de números negativos diferentes son diferentes.

Nótese una vez más que una fórmula por sí misma no define una función. Ya se ha visto que la misma fórmula define funciones distintas con propiedades diferentes.

17. Hallar el intervalo «más amplio» D en que la fórmula $f(x) = x^2$ define una función inyectiva.

Solución:

En tanto que el intervalo D contenga bien números positivos, bien números negativos, pero no de ambos, la función será inyectiva. Así que D puede ser el intervalo infinito $[0, \infty[$ o el $]-\infty, 0]$. Pueden darse otros intervalos infinitos en los cuales f sea inyectiva, pero serían subconjuntos de alguno de estos dos.

18. ¿Puede ser inyectiva una función constante?

Solución:

Si el dominio de una función consta de un solo elemento, la función será constante e inyectiva.

19. ¿Sobre qué conjuntos A la función idéntica $1_A : A \to A$ es inyectiva?

Solución:

A puede ser cualquier conjunto. La función idéntica es siempre inyectiva.

20. En el Problema 7 se enunciaron todas las funciones posibles de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 0\}$. De estas funciones, ¿cuáles son inyectivas?

Solución:

Ninguna lo es. En cada función, por lo menos dos elementos tienen la misma imagen.

FUNCIONES SOBREYECTIVAS

21. Sea $f : A \to B$. Hallar $f(A)$, es decir, el dominio de imágenes de f, si f es una función sobreyectiva.

Solución:

Si f es sobreyectiva, entonces todo elemento del codominio de f pertenece al dominio de imagenes, así que $f(A) = B$.

22. En el Problema 8, la función $f : A \to A$ ¿es sobreyectiva?

Solución:

Los numeros 1 y 4 del codominio no son imágenes de ningún elemento del dominio, por tanto, f no es una función sobreyectiva. O lo que es lo mismo, $f(A) = \{2, 3, 5\}$ es un subconjunto propio de A.

23. Sea $A = [-1, 1]$. De las funciones f, g y h de A en A definidas por:

$$(1)\ f(x) = x^2, \quad (2)\ g(x) = x^3, \quad (3)\ h(x) = \operatorname{sen} x$$

¿Cuál es sobreyectiva, si la hay?

Solución:

(1) Como en el dominio de valores de f no hay ningún numero negativo, entonces f no es funcion sobreyectiva.
(2) La función g es sobreyectiva, esto es, $g(A) = A$.
(3) La funcion h no es sobreyectiva, pues en A no hay ningún número x tal que $\operatorname{sen} x = 1$.

24. ¿Puede ser sobreyectiva una función constante?

Solución:

Si el codominio de una función f consta de un solo elemento, entonces f es siempre una función constante y es sobreyectiva.

25. ¿Sobre qué conjuntos A será sobreyectiva la función idéntica $1_A : A \to A$?

Solución:

La funcion identica es siempre sobreyectiva, así que A puede ser cualquier conjunto.

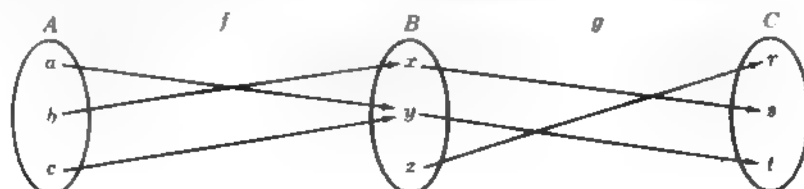
26. En el Problema 7 aparecen todas las funciones posibles de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 0\}$. Entre éstas, ¿cuáles son sobreyectivas, si las hay?

Solución:

Todas las funciones son sobreyectivas menos f_1 y f_8.

FUNCIONES PRODUCTO DE COMPOSICION

27. Sean las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definidas por el diagrama



(*a*) Encontrar la función producto $(g \circ f): A \to C$.
(*b*) Encontrar los dominios de imágenes de f, g y $g \circ f$.

Solución:

(*a*) Mediante la definición de la función producto se obtiene:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

Obsérvese que se llega al mismo resultado «siguiendo la flecha».

$$a \to y \to t$$
$$b \to x \to s$$
$$c \to y \to t$$

(*b*) Según el diagrama, el dominio de imágenes de f es $\{x, y\}$ y el de g es $\{r, s, t\}$. Según (*a*), el dominio de imágenes de $g \circ f$ es $\{s, t\}$. Nótese que los dominios de imágenes de g y de $g \circ f$ son diferentes.

28. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean las funciones $f: A \to A$ y $g: A \to A$ definidas por:

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 1, \quad f(5) = 2$$
$$g(1) = 4, \quad g(2) = 1, \quad g(3) = 1, \quad g(4) = 2, \quad g(5) = 3$$

Hallar las funciones producto de composición $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

Por la definición de producto de composición de funciones se tiene:

$$(f \circ g)(1) \equiv f(g(1)) = f(4) = 1$$
$$(f \circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(f \circ g)(3) \equiv f(g(3)) = f(1) = 3$$
$$(f \circ g)(4) \equiv f(g(4)) = f(2) = 5$$
$$(f \circ g)(5) \equiv f(g(5)) = f(3) = 3$$

Asimismo,

$$(g \circ f)(1) \equiv g(f(1)) = g(3) = 1$$
$$(g \circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(5) = 3$$
$$(g \circ f)(3) \equiv g(f(3)) = g(3) = 1$$
$$(g \circ f)(4) \equiv g(f(4)) = g(1) = 4$$
$$(g \circ f)(5) \equiv g(f(5)) = g(2) = 1$$

Se ve que las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ no son iguales.

29. Sean las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por:

$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2$$

Dar fórmulas para las funciones producto $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución:

Calculando primero $g \circ f: R \to R$ y teniendo en cuenta que de lo que se trata esencialmente es de sustituir la expresión de f dentro de la fórmula de g, se tiene por la definición del producto de funciones.

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

Tal vez parezca más familiar el proceso definiendo las funciones así:

$$y = f(x) = 2x + 1, \qquad z = g(y) = y^2 - 2$$

y eliminando y de las dos fórmulas:

$$z = y^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

Hay que familiarizarse con el primer método, pues es necesario tener en claro que x es solamente una variable muda. Calculando ahora $f \circ g: R \to R$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

30. Sean las funciones f y g sobre los números reales R definidas por

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \qquad g(x) = 3x - 4$$

(1) Dar fórmulas para las funciones producto $g \circ f$ y $f \circ g$.
(2) Verificar las fórmulas mostrando que $(g \circ f)(2) = g(f(2))$ y que $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

Solución:

(1) $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x - 3) - 4 = 3x^2 + 6x - 13$
$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3 = 9x^2 - 18x + 5$

(2) $(g \circ f)(2) = 3(2)^2 + 6(2) - 13 = 12 + 12 - 13 = 11$
$g(f(2)) = g(2^2 + 2(2) - 3) = g(5) = 3(5) - 4 = 11$
$(f \circ g)(2) = 9(2)^2 - 18(2) + 5 = 36 - 36 + 5 = 5$
$f(g(2)) = f(3(2) - 4) = f(2) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$

31. Demostrar. Si $f : A \to B$ es sobreyectiva y si $g : B \to C$ es sobreyectiva, entonces la función producto $(g \circ f) : A \to C$ es también sobreyectiva.

Solución:

Sea c un elemento de C. Puesto que g es sobreyectiva, hay un elemento $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Como también f es sobreyectiva, hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Pero $(g \circ f)(a) \equiv g(f(a)) = g(b) = c$. Así, pues, para todo $c \in C$, queda demostrado que hay al menos un elemento $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. Por consiguiente, $g \circ f$ es una función sobreyectiva.

32. Demostrar el Teorema 4-1: Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$; entonces

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Solución:

Las dos funciones son iguales si hacen corresponder la misma imagen a cada elemento del dominio, es decir, si

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

para todo $x \in A$. Calculando,

$$((h \circ g) \circ f)(x) \equiv (h \circ g)(f(x)) \equiv h(g(f(x)))$$

y

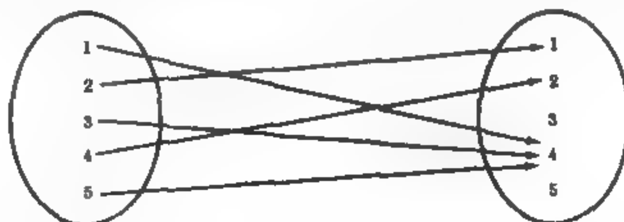
$$(h \circ (g \circ f))(x) \equiv h((g \circ f)(x)) \equiv h(g(f(x)))$$

Entonces

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

IMAGEN RECIPROCA DE UNA FUNCION

33. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dada la función $f : A \to A$ definida por el diagrama



Hallar (1) $f^{-1}(2)$, (2) $f^{-1}(3)$, (3) $f^{-1}(4)$, (4) $f^{-1}\{1,2\}$, (5) $f^{-1}\{2,3,4\}$.

Solución:

(1) $f^{-1}(2)$ consiste en los elementos cuya imagen es 2. Solo 4 tiene 2 por imagen, así que $f^{-1}(2) = \{4\}$.
(2) $f^{-1}(3) = \varnothing$, pues 3 no es imagen de ningún elemento del dominio.
(3) $f^{-1}(4) = \{1, 3, 5\}$, pues $f(1) = 4$, $f(3) = 4$, $f(5) = 4$ y 4 no es la imagen de ningún otro elemento.
(4) $f^{-1}\{1, 2\}$ es el conjunto de elementos cuya imagen es 1 ó 2; por consiguiente, $f^{-1}\{1, 2\} = \{2, 4\}$.
(5) $f^{-1}\{2, 3, 4\} = \{4, 1, 3, 5\}$, puesto que estos números y solo ellos tienen 2, 3 y 4 por imagen.

34. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$. Hallar:
(1) $f^{-1}(25)$, (2) $f^{-1}(-9)$, (3) $f^{-1}([-1, 1])$, (4) $f^{-1}(]-\infty, 0])$, (5) $f^{-1}([4, 25])$.

Solución:

(1) $f^{-1}(25) = \{5, -5\}$, pues $f(5) = 25$ y $f(-5) = 25$ y ningún otro número tiene por cuadrado 25

(2) $f^{-1}(-9) = \varnothing$, ya que ningún número real tiene por cuadrado -9, o lo que es lo mismo, la ecuación $x^2 = -9$ no tiene raíz real.

(3) $f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$, ya que $|x| \le 1$ implica $|x^2| \le 1$, es decir, que si x pertenece al $[-1, 1]$, entonces $f(x) = x^2$ también pertenece al $[-1, 1]$. ¿

(4) $f^{-1}(]-\infty, 0]) = \{0\}$, puesto que $0^2 = 0 \in]-\infty, 0]$ y ningún otro número tiene su cuadrado en el $]-\infty, 0]$

(5) $f^{-1}([4, 25])$ es el conjunto de números cuyo cuadrado pertenece al $[4, 25]$, es decir los números x tales que $4 \le x^2 \le 25$. Así, pues,

$$f^{-1}([4, 25]) = \{x \mid 2 \le x \le 5 \text{ o } -5 \le x \le -2\}$$

35. Sea $f: A \to B$. Hallar $f^{-1}(f(A))$, es decir, hallar la recíproca del dominio de imágenes de f.

Solución:

Como la imagen de cada elemento de A está en el dominio de imágenes de f,

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

en todos los casos

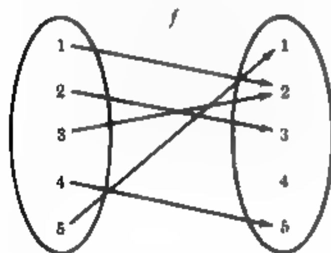
FUNCION RECIPROCA

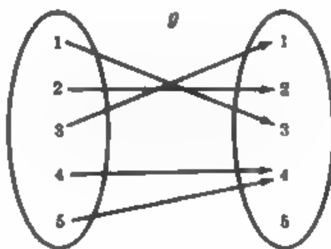
36. Sean $f: A \to B$ y la función recíproca de f, $f^{-1}: B \to A$. Díganse dos propiedades de la función f.

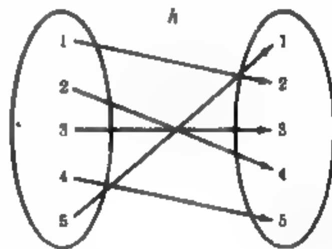
Solución:

La función f debe ser inyectiva y sobreyectiva. → biyectiva

37. Sea $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean las funciones $f: W \to W$, $g: W \to W$ y $h: W \to W$ definidas por los diagramas siguientes:







¿Cuál de estas funciones, si las hay, tiene una función recíproca?

Solución:

Para que una función tenga recíproca, debe ser inyectiva y sobreyectiva. Solamente h es inyectiva y sobreyectiva; así que h, y solamente h, tiene función recíproca

38. Dado $A = [-1, 1]$, sean las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4 de A en A definidas por
(1) $f_1(x) = x^2$, (2) $f_2(x) = x^5$, (3) $f_3(x) = \text{sen } x$, (4) $f_4(x) = \text{sen } \frac{1}{2}\pi x$

Decir cuáles de estas funciones tienen o no función recíproca.

Solución:

(1) f_1 no es inyectiva ni sobreyectiva; así que f_1 carece de recíproca.

(2) f_2 es inyectiva, ya que $x \ne y$ implica $x^5 \ne y^5$. f_2 es también sobreyectiva. Por tanto, f_2 tiene función recíproca.

(3) f_3 es inyectiva, pero no sobreyectiva; por tanto, f_3 no tiene función recíproca ¿

(4) f_4 tiene función recíproca porque es inyectiva y sobreyectiva.

39. Demostrar: Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ tienen funciones recíprocas $f^{-1}: B \to A$ y $g^{-1}: C \to B$, entonces la función producto de composición $g \circ f: A \to C$ tiene una función recíproca que es $f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$.

Solución:

Según el Teorema 4-3, hay que demostrar que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1 \qquad \text{y} \qquad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1$$

Reiterando la aplicación del Teorema 4-1, la ley asociativa de la composición de funciones resulta

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f)$$
$$= f^{-1} \circ (1 \circ f) = f^{-1} \circ f = 1$$

Obsérvese que se utiliza la propiedad de que $g^{-1} \circ g$ es la función idéntica y la de que el producto de 1, la función idéntica, y f es f. Análogamente,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1})$$
$$= g \circ (1 \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1$$

40. Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Siendo f inyectiva y sobreyectiva, f tiene una función recíproca $f^{-1}: R \to R$. Hallar una fórmula que defina la función recíproca f^{-1}.

Solución:

Sea y la imagen de x por f. Entonces

$$y = f(x) = 2x - 3$$

Por tanto, x será la imagen de y por la función recíproca f^{-1}, es decir,

$$x = f^{-1}(y)$$

Expresando x por y en la anterior ecuación

$$x = (y + 3)/2$$

Y entonces $\qquad f^{-1}(y) = (y + 3)/2$

es una fórmula que define la función recíproca. Nótese que y es simplemente una variable muda, así que

$$f^{-1}(x) = (x + 3)/2$$

define también la función recíproca. Además, esta última expresión es preferible por ser x la que se acostumbra a emplear para definir funciones.

41. Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + 5$. Siendo f inyectiva y sobreyectiva, f tiene función recíproca. Dar una fórmula que defina la f^{-1}.

Solución:

Expresando x por y: $y = x^3 + 5$, $y - 5 = x^3$, y $x = \sqrt[3]{y - 5}$.

Así que la función recíproca es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5}$.

42. Sean $A = R - \{3\}$ y $B = R - \{1\}$. Sea la función $f: A \to B$ definida por

$$f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$$

Así que f es inyectiva y sobreyectiva. Hallar una fórmula para definir la f^{-1}.

Solución:

Expresando x por y a partir de $y = \frac{x - 2}{x - 3}$, se tiene $x = \frac{2 - 3y}{1 - y}$.

Luego la función recíproca pedida es $f^{-1}(x) = \frac{2 - 3x}{1 - x}$.

PROBLEMAS DIVERSOS

43. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Hallar:

(a) $f(-3)$ (b) $f(2) - f(-4)$ (c) $f(y)$ (d) $f(a^2)$ (e) $f(x^2)$ (f) $f(y - z)$ (g) $f(x + h)$ (h) $f(x + 3)$ (i) $f(2x - 3)$ (j) $f(2x - 3) + f(x + 3)$ (k) $f(x^2 - 3x + 2)$ (l) $f(f(x))$ (m) $f(f(x + 1))$ (n) $f(x + h) - f(x)$ (o) $[f(x + h) - f(x)]/h$

Solución:

La función hace corresponder a cada elemento el cuadrado del elemento menos 3 veces el elemento más 2.

(a) $f(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$

(b) $f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 0$, $f(-4) = (-4)^2 - 3(-4) + 2 = 30$. Entonces

$$f(2) - f(-4) = 0 - 30 = -30$$

(c) $f(y) = (y)^2 - 3(y) + 2 = y^2 - 3y + 2$

(d) $f(a^2) = (a^2)^2 - 3(a^2) + 2 = a^4 - 3a^2 + 2$

(e) $f(x^2) = (x^2)^2 - 3(x^2) + 2 = x^4 - 3x^2 + 2$

(f) $f(y - z) = (y - z)^2 - 3(y - z) + 2 = y^2 - 2yz + z^2 - 3y + 3z + 2$

(g) $f(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h) + 2 = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2$

(h) $f(x + 3) = (x + 3)^2 - 3(x + 3) + 2 = (x^2 + 6x + 9) - 3x - 9 + 2 = x^2 + 3x + 2$

(i) $f(2x - 3) = (2x - 3)^2 - 3(2x - 3) + 2 = 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 9 + 2 = 4x^2 - 18x + 20$

(j) Usando (h) e (i) tenemos

$$f(2x - 3) + f(x + 3) = (4x^2 - 18x + 20) + (x^2 + 3x + 2) = 5x^2 - 15x + 22$$

(k) $f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

(l) $f(f(x)) = f(x^2 - 3x + 2) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

(m) $f(f(x + 1)) = f([(x + 1)^2 - 3(x + 1) + 2]) = f([x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2])$
$= f(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(n) Para (g), $f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2$. De donde

$$f(x + h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 2xh + h^2 - 3h$$

(o) Empleando (n) tenemos

$$[f(x + h) - f(x)]/h = (2xh + h^2 - 3h)/h = 2x + h - 3$$

44. Sean las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 5$. Hallar (a) $f(5)$, (b) $g(-3)$, (c) $g(f(2))$, (d) $f(g(3))$, (e) $g(a - 1)$, (f) $f(g(a - 1))$, (g) $g(f(x))$, (h) $f(g(x + 1))$, (i) $g(g(x))$.

Solución:

(a) $f(5) = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$

(b) $g(-3) = (-3)^2 + 5 = 9 + 5 = 14$

(c) $g(f(2)) = g([2(2) - 3]) = g([4 - 3]) = g(1) = (1)^2 + 5 = 6$

(d) $f(g(3)) = f([3^2 + 5]) = f([9 + 5]) = f(14) = 2(14) - 3 = 25$

(e) $g(a - 1) = (a - 1)^2 + 5 = a^2 - 2a + 1 + 5 = a^2 - 2a + 6$

(f) Usando (e) tenemos

$$f(g(a - 1)) = f(a^2 - 2a + 6) = 2(a^2 - 2a + 6) - 3 = 2a^2 - 4a + 9$$

(g) $g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$

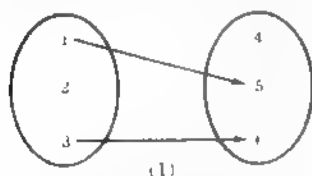
(h) $f(g(x + 1)) = f([(x + 1)^2 + 5]) = f([x^2 + 2x + 1 + 5])$
$= f(x^2 + 2x + 6) = 2(x^2 + 2x + 6) - 3 = 2x^2 + 4x + 9$

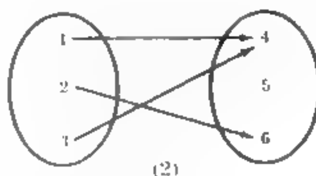
(i) $g(g(x)) = g(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30$

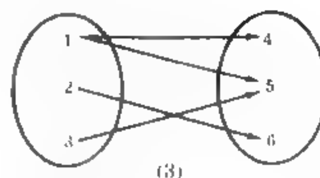
Problemas propuestos

DEFINICION DE FUNCION

45. Decir cuando los diagramas siguientes definen o no una función de $\{1, 2, 3\}$ en $\{4, 5, 6\}$


(1)


(2)


(3)

46. Definir por una formula las siguientes funciones

(1) Hacer corresponder a todo numero real por f su cuadrado más 3.

(2) A cada numero real asignarle por g el numero más el valor absoluto del numero

(3) A todo numero real mayor o igual que 3 atribuirle por h el numero al cubo, y a cada numero menor o igual que 3 atribuirle por h el número 4

47. Sea la funcion $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Hallar (1) $f(4)$, (2) $f(-3)$, (3) $f(y - 2z)$, (4) $f(x - 2)$

48. Sea la funcion $g: R \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \geq 2 \\ x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$.
Hallar (1) $g(5)$, (2) $g(0)$, (3) $g(-2)$

49. Sea $I = [-3, 5]$ y sea la funcion $f: I \to R$ definida por $f(x) = 2x^2 - 7$. Calcular (a) $f(2)$, (b) $f(6)$, (c) $f(t - 2)$

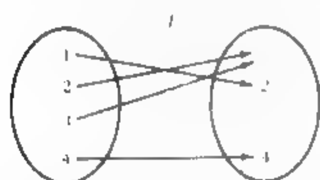
50. Sea la funcion $h: R \to R$ definida por $h(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x > 9 \\ x^2 - |x| & \text{si } x \in [-9, 9] \\ x - 4 & \text{si } x < -9 \end{cases}$

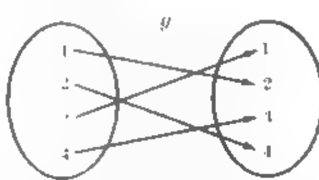
Calcular (a) $h(3)$, (b) $h(12)$, (c) $h(-15)$, (d) $h(h(5))$, es decir, $h^2(5)$

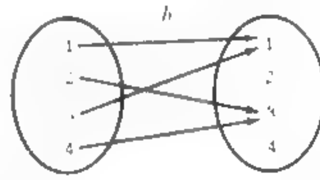
51. Sean $X = \{2, 3\}$ e $Y = \{1, 3, 5\}$. ¿Cuantas funciones diferentes hay de X en Y?

DOMINIO DE IMAGENES DE UNA FUNCION

52. Los diagramas siguientes definen funciones f, g y h que aplican el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ en si mismo


f


g


h

Averiguar (1) el dominio de imagenes de f, (2) el de g, (3) el de h

53. Dado $W = \{-1, 0, 2, 5, 11\}$. Sea la funcion $f: W \to R$ definida por $f(x) = x^2 - x - 2$. ¿Cual es el dominio de imagenes de f?

54. Considerense las seis funciones siguientes

$$f_1 : [-2, 2] \to R \qquad f_4 :]-\infty, -5] \to R$$
$$f_2 : [0, 3] \to R \qquad f_5 : [-1, 4[\to R$$
$$f_3 : [-3, 0] \to R \qquad f_6 : [-5, 3[\to R$$

Si cada funcion viene definida por la misma formula,

$$f(x) = x^2$$

es decir, si cada funcion asigna a cada numero x el x^2, calcular el dominio de imagenes de (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6

55. Dadas las seis funciones del Problema 54, definida cada una por la fórmula

$$f(x) = x^3$$

o sea que a cada número x cada función le asigna el x^3, encontrar el dominio de valores de (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6.

56. Si las funciones del Problema 54 se definen por la fórmula

$$f(x) = x - 3$$

hallar el dominio de imágenes de (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6.

57. Si las funciones del Problema 54 se definen por la fórmula

$$f(x) = 2x + 4$$

averiguar el dominio de imágenes de (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6.

58. Sea $f: A \to B$. En lo que sigue, ¿qué es cierto siempre?
(1) $f(A) \subset B$, (2) $f(A) = B$, (3) $f(A) \supset B$

FUNCIONES INYECTIVAS

59. Sea $f: X \to Y$. Decir entre las condiciones siguientes cuándo se define o no una función inyectiva.

(1) $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. (3) $f(a) \neq f(b)$ implica $a \neq b$.
(2) $a = b$ implica $f(a) = f(b)$. (4) $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$.

60. Decir de cada función del Problema 54 si es o no inyectiva.

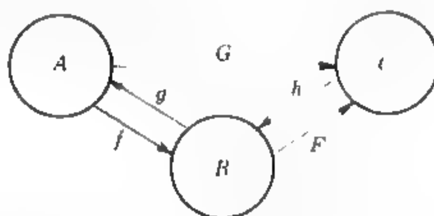
61. Decir de cada función del Problema 55 si es o no inyectiva.

62. Decir de cada función del Problema 52 si es o no inyectiva.

63. Demostrar: Si $f: A \to B$ es inyectiva y si $g: B \to C$ es inyectiva, la función producto $g \circ f: A \to C$ es inyectiva.

FUNCIONES PRODUCTO

64. En el siguiente diagrama se representan las funciones $f: A \to B$, $g: B \to A$, $h: C \to B$, $F: B \to C$ y $G: A \to C$.



Decir en lo que sigue cuándo se define una función producto, y siendo el caso, determinar su dominio y su codominio.

(1) $g \circ f$, (2) $h \circ f$, (3) $F \circ f$, (4) $G \circ f$, (5) $g \circ h$, (6) $F \circ h$, (7) $h \circ G \circ g$, (8) $h \circ G$

65. Dadas las funciones f, g y h del Problema 52, hallar las funciones producto (1) $f \circ g$, (2) $h \circ f$, (3) $g \circ g$, o sea g^2.

66. Sean las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por

$$f(x) = x^2 + 3x + 1, \qquad g(x) = 2x - 3$$

Dar fórmulas para las funciones producto (1) $f \circ g$, (2) $g \circ f$, (3) $g \circ g$, (4) $f \circ f$.

67. Sean las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x, \qquad g(x) = x^2 + 1$$

Hallar (a) $(g \circ f)(3)$, (b) $(f \circ g)(-2)$, (c) $(g \circ f)(-4)$, (d) $(f \circ g)(5)$.

RECIPROCA DE UNA FUNCION

68. Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Hallar (1) $f^{-1}(5)$, (2) $f^{-1}(0)$, (3) $f^{-1}(10)$, (4) $f^{-1}(-5)$, (5) $f^{-1}([10, 26])$, (6) $f^{-1}([0, 5])$, (7) $f^{-1}([-5, 1])$, (8) $f^{-1}([-5, 5])$.

69. Sea $g: R \to R$ definida por $g(x) = \text{sen } x$. Hallar (1) $g^{-1}(0)$, (2) $g^{-1}(1)$, (3) $g^{-1}(2)$, (4) $g^{-1}([-1, 1])$.

70. Sea $f: A \to B$. Averiguar $f^{-1}(B)$.

PROBLEMAS DIVERSOS

71. Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = 3x + 4$. f es, pues, inyectiva y sobreyectiva. Dar una fórmula que defina f^{-1}.

72. Sean $A = R - \{-\frac{1}{2}\}$ y $B = R - \{\frac{1}{2}\}$. Sea $f: A \to B$ definida por

$$f(x) = (x - 3)/(2x + 1)$$

Entonces f es inyectiva y sobreyectiva. Hallar una fórmula para definir f^{-1}.

73. Sea $W = [0, \infty[$. Dadas las funciones $f: W \to W$, $g: W \to W$ y $h: W \to W$ definidas por

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad h(x) = x + 2$$

¿cuál de estas funciones, si la hay, es sobreyectiva?

74. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2 + x - 2$. Hallar

(a) $f(3)$ (b) $f(-3) - f(2)$ (c) $f(x-2)$ (d) $f(f(-2))$ (e) $f(a^2)$ (f) $f(x+h)$ (g) $f(x+h) - f(x)$ (h) $f(f(x))$ (i) $f^{-1}(10)$ (j) $f^{-1}(1)$ (k) $f^{-1}(5)$

75. Sean $f: A \to B$, $g: B \to A$ y $g \circ f = 1_A$ la función idéntica sobre A. Decir qué es cierto o falso entre lo que sigue.

(1) $g = f^{-1}$ (2) f es una función sobreyectiva. (3) f es una función inyectiva. (4) g es una función sobreyectiva. (5) g es una función inyectiva.

Respuestas a los problemas propuestos

45. (1) No, (2) Sí, (3) No.

46. (1) $f(x) = x^2 - 3$, (2) $g(x) = x + |x|$, (3) $h(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \geq 3 \\ 4 \text{ si } x < 3 \end{cases}$

47. (1) 3, (2) 24, (3) $y^2 - 4yz + 4z^2 - 4y + 8z + 3$, (4) $x^2 - 8x + 15$

48. (1) 10, (2) 2, (3) 0

49. (a) 1, (b) No definido, pues 6 no pertenece al dominio de definición, (c) $2t^2 - 8t + 1$ si $1 \leq t \leq 7$

50. (a) 6, (b) 29, (c) -19, (d) 45

51. Nueve

52. (1) $\{1, 2, 4\}$, (2) $\{1, 2, 3, 4\}$, (3) $\{1, 3\}$

53. $\{0, -2, 18, 108\}$

54. (1) $[0, 4]$, (2) $[0, 9]$, (3) $[0, 9]$, (4) $[25, \infty[$, (5) $[0, 16[$, (6) $[0, 25]$.

55. (1) $[-8, 8]$, (2) $[0, 27]$, (3) $[-27, 0]$, (4) $]-\infty, -125]$, (5) $[-1, 64[$, (6) $[-125, 27[$.

56. (1) $[-5, -1]$, (2) $[-3, 0]$, (3) $[-6, -3]$, (4) $]-\infty, -8]$, (5) $[-4, 1[$, (6) $[-8, 0[$.

57. (1) $[0, 8]$, (2) $[4, 10]$, (3) $[-2, 4]$, (4) $]-\infty, -6]$, (5) $[2, 12[$, (6) $[-6, 10[$.

58. $f(A) \subset B$.

59. (1) Sí, (2) No, (3) No, (4) Sí.

60. (1) No, (2) Sí, (3) Sí, (4) Sí, (5) No, (6) No.

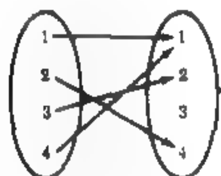
61. Todas son inyectivas.

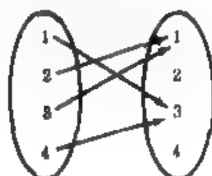
62. Sólo g es inyectiva

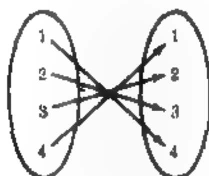
63. Hay que demostrar que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ implica $a = b$. Sea $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$. Entonces, por la definición de función producto, $g(f(a)) \equiv (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \equiv g(f(b))$. Como g es inyectiva, $f(a) = f(b)$, y como f es inyectiva, $a = b$. Por consiguiente, $g \circ f$ es inyectiva.

64. (1) $g \circ f : A \to A$, (2) No definido, (3) $F \circ f : A \to C$, (4) No definido, (5) $g \circ h : C \to A$, (6) $F \circ h : C \to C$, (7) $h \circ G \circ g : B \to B$, (8) $h \circ G : A \to B$.

65. (1) $f \circ g$ (2) $h \circ f$ (3) $g \circ g$







66. (1) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ (3) $(g \circ g)(x) = 4x - 9$
(2) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$ (4) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$

67. (a) 10, (b) 15, (c) 65, (d) 624

68. (1) $\{-2, 2\}$ (3) $\{3, -3\}$ (5) $\{x \mid -5 < x < -3$ o $3 < x < 5\}$ (7) $\{0\}$
(2) $\emptyset$ (4) $\emptyset$ (6) $\{x \mid -2 < x < 2\}$ (8) $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

69. (1) $\{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\} = \{x \mid x = n\pi$ donde $n \in Z\}$.
(2) $\{x \mid x = (\pi/2) + 2n\pi$ donde $n \in Z\}$.
(3) $\emptyset$. (4) R, el conjunto de todos los números reales.

70. $f^{-1}(B) = A$.

71. $f^{-1}(x) = (x - 4)/3$.

72. $f^{-1}(x) = (3 + x)/(1 - 2x)$

73. Solo f es sobreyectiva.

74. (a) 10 (d) -2 (g) $2xh + h^2 + h$ (j) $\{2, -3\}$
(b) 0 (e) $y^2 + y - 2$ (h) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x$ (k) $\{\}$
(c) $x^2 - 3x$ (f) $x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 2$ (i) $\{3, -4\}$

75. (1) Falso, (2) Falso, (3) Cierto, (4) Cierto, (5) Falso.

Capítulo 5

Conjuntos producto y grafos de funciones

PARES ORDENADOS

Intuitivamente, un *par ordenado* consta de dos elementos, a y b, por ejemplo, que en el par se designan como primero y segundo elementos respectivamente. Un par ordenado se simboliza por

$$(a, b)$$

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si, y solamente si, $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 1-1: Los pares ordenados (2, 3) y (3, 2) son diferentes.

Ejemplo 1-2: Los puntos del plano cartesiano de la Fig. 5-1 representan pares ordenados de numeros reales.

Ejemplo 1-3: El conjunto $\{2, 3\}$ no es un par ordenado, pues los elementos 2 y 3 no se distinguen.

Ejemplo 1-4: Puede haber pares ordenados que tengan iguales el primero y el segundo elementos tales como (1, 1), (4, 4) y (5, 5).

Observación 5-1: Un par ordenado (a, b) se puede definir rigurosamente por

$$\{a, b\} \equiv \{ \{a\}, \{a, b\} \}$$

Segun esta definicion, la propiedad fundamental de los pares ordenados se puede demostrar

$$(a, b) = (c, d) \text{ implica } a = c \text{ y } b = d$$

CONJUNTO PRODUCTO

Dados dos conjuntos A y B, se llama *conjunto producto* de A y B el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Se le denota por

$$A \times B$$

que se lee «A cruz B». Más brevemente

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo 2-1: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. El producto conjunto es entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Ejemplo 2-2: Sea $W = \{s, t\}$. Se tiene

$$W \times W = \{(s, s), (s, t), (t, s), (t, t)\}$$

Ejemplo 2-3: El plano cartesiano de la Fig. 5-1 es el conjunto producto de los numeros reales por si mismos, es decir, $R \times R$.

El conjunto producto $A \times B$ se llama también *producto cartesiano* de A y B, por el matemático Descartes, quien, en el siglo diecisiete fue el primero en investigar el conjunto $R \times R$. También, por la misma razón se llama plano cartesiano a la representación de $R \times R$ en la Figura 5-1.

Observación 5-2: Si el conjunto A tiene n elementos y el conjunto B tiene m elementos, entonces el conjunto producto $A \times B$ tiene n veces m elementos, esto es, nm elementos. Si uno de los conjuntos A o B es vacío, entonces $A \times B$ es vacío. Y, en fin, si uno de los A o B es infinito y el otro no es vacío, entonces $A \times B$ es infinito.

Observación 5-3: El producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo, es decir, que

$$A \times B \neq B \times A$$

a menos que $A = B$ o que uno de los factores sea vacío.

DIAGRAMAS DE COORDENADAS

Ya se está familiarizado con el plano cartesiano $R \times R$, como se muestra en la Fig. 5-1. Cada punto P representa un par ordenado (a, b) de números reales. Una recta vertical por P corta al eje horizontal en a y una recta horizontal por P corta al eje vertical en b, como se ve en la Figura 5-1.

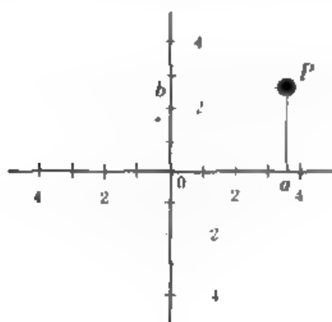


Fig. 5-1

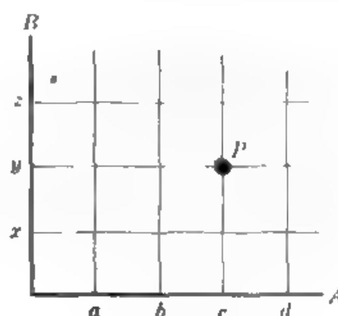


Fig. 5-2

El producto cartesiano de dos conjuntos que no tengan muchos elementos, se puede representar en un diagrama de coordenadas en forma semejante. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z\}$, entonces el diagrama de coordenadas de $A \times B$ es como se ve en la Fig. 5-2. Aquí los elementos de A se representan sobre el eje horizontal y los de B sobre el eje vertical. Se ve que las líneas verticales que pasan por los elementos de A y las horizontales que pasan por los elementos de B se cortan en 12 puntos, que representan, como es claro, el producto $A \times B$. El punto P es el par ordenado (c, y).

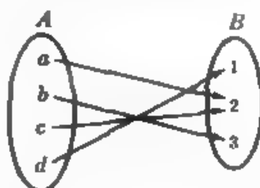
GRAFO DE UNA FUNCION

Sea f una función de A en B, es decir, sea $f: A \to B$. El grafo f^* de la función f es el conjunto de todos los pares ordenados en los que $a \in A$ está como primer elemento y su imagen como segundo elemento. Es decir,

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A,\ b = f(a)\}$$

Se ve que f^*, el grafo de $f: A \to B$, es un subconjunto de $A \times B$.

Ejemplo 3-1: Sea la función $f: A \to B$ definida por el diagrama



Entonces $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$ y $f(d) = 1$. De donde el grafo de f es

$$f^* = \{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 1)\}$$

Ejemplo 3-2: Sea $W = \{1, 2, 3, 4\}$. La función $f: W \to R$ definida por

$$f(x) = x + 3$$

tiene por grafo

$$f^* = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$$

Ejemplo 3-3: Si N es el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, ..., la función $g: N \to N$ definida por

$$g(x) = x^3$$

tiene por grafo

$$g^* = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64), \ldots\}$$

PROPIEDADES DEL GRAFO DE UNA FUNCION

Sea $f: A \to B$. Se sabe entonces que a cada elemento $a \in A$ le corresponde un elemento de B y que en B solo un elemento le corresponde a cada $a \in A$. En consecuencia, de estas dos propiedades de f, el *grafo f^* de f tiene las dos propiedades siguientes:*

Propiedad 1: Por cada $a \in A$, hay un par ordenado $(a, b) \in f^*$.

Propiedad 2: Cada $a \in A$ es el primer elemento en un par ordenado de f^* solamente, es decir,

$$(a, b) \in f^*, \ (a, c) \in f^* \quad \text{implica} \quad b = c$$

En los ejemplos que siguen, sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Ejemplo 4-1: El conjunto de pares ordenados

$$\{(1, 5), (2, 3), (4, 6)\}$$

no puede ser el grafo de una funcion de A en B, pues no cumple la propiedad 1, ya que, por ejemplo, $3 \in A$ y en ninguno de los pares ordenados esta 3 de primer elemento.

Ejemplo 4-2: El conjunto de pares ordenados

$$\{(1, 5), (2, 3), (3, 6), (4, 6), (2, 4)\}$$

no puede ser el grafo de una función de A en B, pues no cumple la propiedad 2, o sea que el elemento $2 \in A$ esta como primer elemento en dos pares ordenados diferentes (2, 3) y (2, 4).

GRAFOS Y DIAGRAMAS DE COORDENADAS

Sea f^* el grafo de una función $f: A \to B$. Como f^* es un subconjunto de $A \times B$, se puede representar con el diagrama de coordenadas de $A \times B$.

Ejemplo 5-1: Sea $f(x) = x^2$ la definicion de una función en el intervalo $-2 \le x \le 4$. El grafo de f aparece en la Fig. 5-3 en la forma usual:

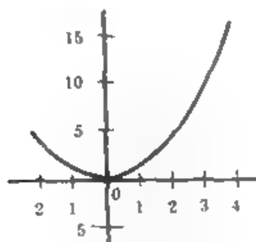


Fig. 5-3

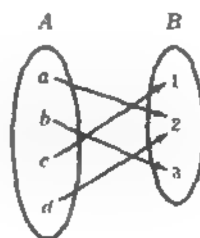


Fig. 5-4

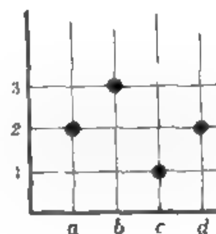


Fig. 5-5

Ejemplo 5-2: Sea una función $f: A \to B$ definida por el diagrama de la Figura 5-4.
Aquí el grafo f^* de f consiste en los pares ordenados $(a, 2)$, $(b, 3)$, $(c, 1)$ y $(d, 2)$. Se representa f^* en el diagrama de coordenadas de $A \times B$ en la Figura 5-5.

PROPIEDADES DE LOS GRAFOS DE FUNCIONES EN DIAGRAMAS

Sea $f: A \to B$. El grafo f^* de f tiene las propiedades ya dichas:

Propiedad 1: Por cada $a \in A$ hay un par ordenado $(a, b) \in f^*$

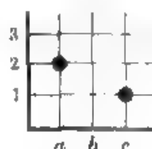
Propiedad 2: Si $(a, b) \in f^*$ y $(a, c) \in f^*$, se sigue que $b = c$

Por tanto, si se representa f^* en el diagrama de coordenadas de $A \times B$, tiene las propiedades siguientes:

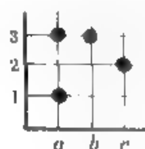
Propiedad 1: Cada línea vertical contiene al menos un punto de f^*.

Propiedad 2: Cada línea vertical contiene solo un punto de f^*.

Ejemplo 6-1: Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Examínense los conjuntos de puntos de los dos diagramas de coordenadas de $A \times B$ siguientes



(1)

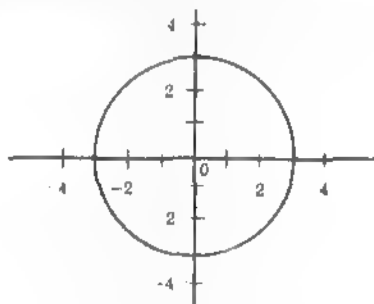


(2)

En (1), la vertical por b no contiene ningún punto del conjunto, luego el conjunto de puntos dado no puede ser el grafo de una función de A en B

En (2), la vertical por a contiene dos puntos del conjunto, así, pues, este conjunto de puntos no puede ser el grafo de una función de A en B

Ejemplo 6-2: El círculo $x^2 + y^2 = 9$, que aparece abajo, no puede ser el grafo de una función porque hay verticales que contienen más de un punto del círculo.



Representación de $x^2 + y^2 = 9$

LAS FUNCIONES COMO CONJUNTOS DE PARES ORDENADOS

Sea f^* un subconjunto de $A \times B$, el producto cartesiano de los conjuntos A y B; y supóngase que f^* tiene las dos propiedades antes dichas:

Propiedad 1: Por cada $a \in A$, hay un par ordenado $(a, b) \in f^*$.

Propiedad 2: No hay dos pares ordenados diferentes en f^* que tengan el mismo primer elemento.

Se tiene así una correspondencia que asigna a cada elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$ que aparece en el par ordenado $(a, b) \in f^*$. La propiedad 1 asegura que cada elemento de A tendrá una imagen, y la propiedad 2 asegura que la imagen dicha es única. De acuerdo con esto, f^* es una función de A en B.

En vista de la correspondencia entre funciones $f: A \to B$ y subconjuntos de $A \times B$ que tienen las propiedades 1 y 2 anteriores, se hace de una función la

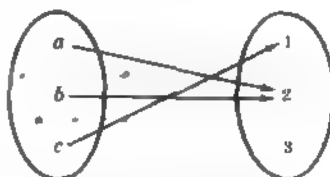
Definición 5-1: Una función f de A en B es un subconjunto de $A \times B$ en el cual cada $a \in A$ aparece como primer elemento en un par ordenado de f y solo en uno.

Aunque esta definición de una función pueda parecer artificiosa, tiene la ventaja de que no emplea conceptos definidos, como son los de «asignar», «hacer corresponder».

Ejemplo 7-1: Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Sea además

$$f = \{(a, 2), (c, 1), (b, 2)\}$$

f tiene las propiedades 1 y 2, siendo, por tanto, una función de A en B, que se ilustra en el diagrama siguiente:



Ejemplo 7-2: Sean $V = \{1, 2, 3\}$ y $W = \{a, e, i, o, u\}$. Sea también

$$f = \{(1, a), (2, e), (3, i), (2, u)\}$$

Aquí f no es una función de V en W, pues dos pares ordenados diferentes de f, los $(2, e)$ y $(2, u)$, tienen el mismo primer elemento. Si f ha de ser una función de V en W, entonces no puede asignar ambos elementos e y u al elemento $2 \in V$.

Ejemplo 7-3: Sean $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{1, 3, 5\}$. Sea

$$f = \{(1, 1), (2, 5), (4, 3)\}$$

Aquí f no es una función de S en T, ya que $3 \in S$ no aparece como primer elemento en ningún par ordenado perteneciente a f.

La consecuencia geométrica de la Definición 5-1 se enuncia en la

Observación 5-4: Sea f un conjunto de puntos en el diagrama de coordenadas de $A \times B$. Si toda vertical contiene un punto y solo uno de f, entonces f es una función de A en B.

Observación 5-5: Sea la función $f: A \to B$ inyectiva y sobreyectiva. Entonces la función recíproca f^{-1} consta de los pares ordenados que al invertirse, o sea al ser permutados sus elementos, pertenecen a f. Es decir, que:

$$f^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in f\}$$

CONJUNTOS PRODUCTOS GENERALIZADOS

El concepto del conjunto producto se puede extender al caso de más de dos conjuntos naturalmente. El producto cartesiano de los conjuntos A, B y C, denotado por

$$A \times B \times C$$

es el conjunto de todas las ternas (a, b, c) en las que $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$. Análogamente, el producto cartesiano de los n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se denota por

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

es el conjunto de todos los n-tuples ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Aquí un n-tuple ordenado tiene un significado claramente intuitivo, es decir, que el n-tuple consiste en n elementos, no necesariamente distintos, donde uno de ellos se designa como primer elemento, otro como segundo elemento, etc.

Ejemplo 8-1: En la geometría tridimensional euclidiana cada punto representa una terna ordenada, o sea su componente x, su componente y y su componente z.

Ejemplo 8-2: Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{x, y\}$. Entonces

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(a, 1, x), (a, 1, y), (a, 2, x), \\ &(a, 2, y), (a, 3, x), (a, 3, y), \\ &(b, 1, x), (b, 1, y), (b, 2, x), \\ &(b, 2, y), (b, 3, x), (b, 3, y)\} \end{aligned}$$

Problemas resueltos

PARES ORDENADOS Y CONJUNTOS PRODUCTO

1. Sean $W = \{\text{Juan, José, Tomás}\}$ y $V = \{\text{Inés, María}\}$. Hallar $W \times V$.

Solución:

$W \times V$ consiste en todos los pares ordenados (a, b) en los que $a \in W$ y $b \in V$. Por tanto,

$$W \times V = \{(\text{Juan, Inés}), (\text{Juan, María}), (\text{José, Inés}), (\text{José, María}), (\text{Tomás, Inés}), (\text{Tomás, María})\}$$

2. Suponiendo que los pares ordenados $(x + y, 1)$ y $(3, x - y)$ son iguales, averiguar x e y.

Solución:

Si $(x + y, 1) = (3, x - y)$ por la propiedad fundamental de los pares ordenados

$$x + y = 3 \quad \text{y} \quad 1 = x - y$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $x = 2$, $y = 1$.

3. Hallar los pares ordenados que corresponden a los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 que aparecen en el diagrama de coordenadas de $A \times B$ en la Fig. 5-6. Aquí, $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$.

Solución:

La línea vertical por P_1 cruza el eje A en b y la horizontal por P_1 cruza el eje B en i; así P_1 corresponde al par ordenado (b, i). Análogamente, $P_2 = (a, a)$, $P_3 = (d, u)$ y $P_4 = (e, e)$.

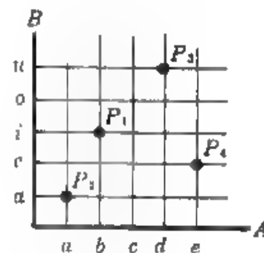


Fig. 5-6

4. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$. Hallar
(1) $A \times (B \cup C)$, (2) $(A \times B) \cup (A \times C)$, (3) $A \times (B \cap C)$, (4) $(A \times B) \cap (A \times C)$

Solución:

(1) Se averigua primero $B \cup C = \{2, 3, 4\}$. Entonces

$$A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$$

(2) Calcular primero $A \times B$ y $A \times C$:

$$A \times B = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$$
$$A \times C = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$$

Ahora se busca la unión de los dos conjuntos:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$$

Por (1) y (2) se ve que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

(3) Calcular primero $B \cap C = \{3\}$. Entonces

$$A \times (B \cap C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$$

(4) En (2) se calcularon $A \times B$ y $A \times C$. La intersección de $A \times B$ y $A \times C$ es el conjunto de los pares ordenados que pertenecen a ambos conjuntos, es decir,

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, 3), (b, 3)\}$$

Por (3) y (4) se ve que

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

5. Representar el conjunto producto

$$\{x \mid 1 \leq x < 4\} \times \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

sombreando el área apropiada en el diagrama cartesiano de $R \times R$.

Solución:

Trácense dos rectas verticales delgadas por 1 y 4 del eje horizontal y otras dos horizontales delgadas por -2 y 3 del eje vertical como se ve en la Figura 5-7.

El área rectangular contorneada por las cuatro rectas, junto con tres de sus lados, representa el producto de los conjuntos. Sombrear el diagrama como se ve en la Figura 5-8.

Nótese que el lado del rectángulo que no pertenece al producto de los conjuntos se traza con línea de puntos.

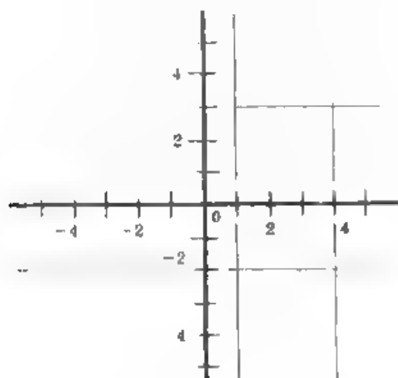


Fig. 5-7

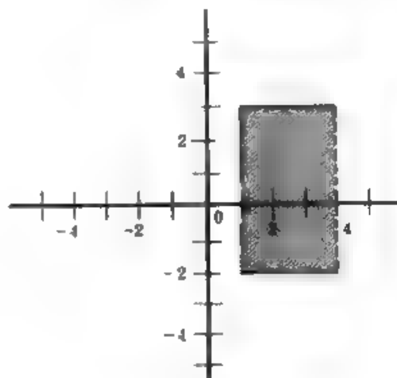


Fig. 5-8

6. Demostrar que $A \subset B$ y $C \subset D$ implican $(A \times C) \subset (B \times D)$.

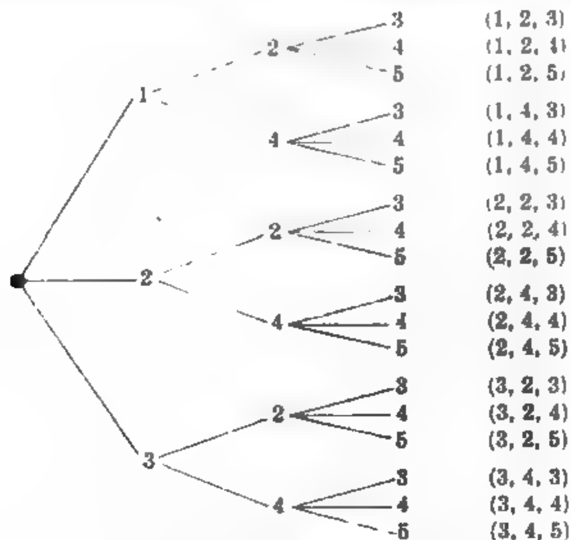
Solución:

Sea (x, y) un elemento cualquiera de $A \times C$, con lo que $x \in A$ e $y \in C$. Por hipótesis, A es un subconjunto de B y C es un subconjunto de D, así que $x \in B$ e $y \in D$, y el par ordenado (x, y) pertenece a $B \times D$. Queda demostrado que $(x, y) \in A \times C$ implica $(x, y) \in B \times D$, por consiguiente, $A \times C$ es un subconjunto de $B \times D$.

7. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$. Hallar $A \times B \times C$.

Solución:

Un método apropiado para encontrar $A \times B \times C$ es el del «diagrama en árbol» que se muestra en seguida:



$A \times B \times C$ es el conjunto de ternas que están a la derecha del «árbol».

8. Demostrar: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Solución:

Se demuestra primero que $A \times (B \cap C)$ es un subconjunto de $(A \times B) \cap (A \times C)$. Sea (x, y) un elemento de $A \times (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ e $y \in B \cap C$. Por la definición de intersección y pertenece tanto a B como a C. Puesto que $x \in A$ e $y \in B$, entonces $(x, y) \in A \times B$. Por tanto, puesto que $x \in A$ e $y \in C$ resulta que $(x, y) \in A \times C$. Se tiene, pues, que (x, y) pertenece a la intersección de $A \times B$ y $A \times C$. Con lo que queda demostrado que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$.

Se demuestra luego que $(A \times B) \cap (A \times C)$ es un subconjunto de $A \times (B \cap C)$. Sea (z, w) un elemento de $(A \times B) \cap (A \times C)$, entonces (z, w) pertenece a $A \times B$ y (z, w) pertenece a $A \times C$. De lo que se sigue que $z \in A$ y $w \in B$, y que $z \in A$ y $w \in C$. Como w pertenece tanto a B como a C, entonces $w \in B \cap C$. Se tiene, pues, $z \in A$ y $w \in B \cap C$, entonces $(z, w) \in A \times (B \cap C)$. Queda demostrado que $(A \times B) \cap (A \times C)$ es un subconjunto de $A \times (B \cap C)$. Por la Definición 1-1, los conjuntos son iguales.

9. Sean $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $V = \{3, 5, 7, 9\}$. Hallar $(S \times W) \cap (S \times V)$.

Solución:

El conjunto producto $(S \times W) \cap (S \times V)$ se puede hallar calculando primero $S \times W$ y $S \times V$ y averiguando luego la intersección de estos conjuntos. Pero, por el Problema 8,

$$(S \times W) \cap (S \times V) = S \times (W \cap V)$$

Así que $W \cap V = \{3, 5\}$, y

$$(S \times W) \cap (S \times V) = S \times (W \cap V) = \{(a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5)\}$$

GRAFOS DE FUNCIONES

10. Dados $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y la función $f: W \to R$ definida por la fórmula $f(x) = x^2$, hallar el grafo f^* de la función f.

Solución:

Primero se calculan $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$. El grafo f^* de f consta de los pares ordenados $(x, f(x))$, o sea de los (x, x^2), donde $x \in W$. Así, pues, $f^* = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$.

11. Sean el conjunto $V = \{a, b, c, d\}$ y la función $g : V \to V$ definida por el diagrama de la Fig. 5-9. Hallar el grafo g^* de la función g y representar g^* en el diagrama de coordenadas de $V \times V$.

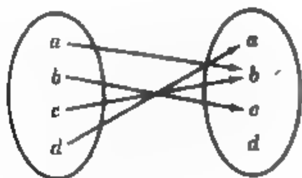


Fig. 5-9

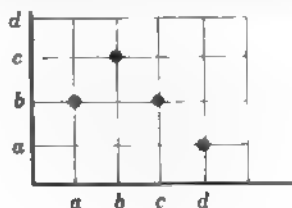


Fig. 5-10

Solución:

Según el diagrama, $g(a) = b$, $g(b) = c$, $g(c) = b$ y $g(d) = a$. Por tanto, $g^* = \{(a, b), (b, c), (c, b), (d, a)\}$. En el diagrama de coordenadas de $V \times V$ se señalan los pares ordenados de g^* como se ve en la Figura 5-10.

12. Sea la función $h : R \to R$ definida por $h(x) = x + 3$. Decir cuáles de los pares siguientes pertenecen o no al grafo h^* de la función h:

(a) (2, 6), (b) (8, 11), (c) (10, 12), (d) (4, 7), (e) (−6, −9), (f) (−1, 2)

Solución:

(a) $h(2) = 2 + 3 = 5$; así $(2, 6)$ no pertenece a h^*.
(b) $h(8) = 8 + 3 = 11$; así $(8, 11)$ pertenece a h^*.
(c) $h(10) = 10 + 3 = 13$; así $(10, 12) \notin h^*$.
(d) $h(4) = 4 + 3 = 7$; así $(4, 7) \in h^*$.
(e) $h(-6) = -6 + 3 = -3$, así $(-6, -9) \notin h^*$.
(f) $h(-1) = -1 + 3 = 2$; así $(-1, 2) \in h^*$.

13. Sea el conjunto $S = \{a, e, i, o, u\}$. Sea g la función que a cada letra de S asigna la letra que le sigue en el alfabeto. Hallar el grafo g^* de la función g.

Solución:

Se averiguan primero $g(a) = b$, $g(e) = f$, $g(i) = j$, $g(o) = p$ y $g(u) = v$. Así

$$g^* = \{(a, b), (e, f), (i, j), (o, p), (u, v)\}$$

FUNCIONES COMO PARES ORDENADOS

14. Sea el conjunto $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Entre los siguientes conjuntos de pares ordenados decir cuáles son o no funciones de V en V.

(1) $f_1 = \{(2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4)\}$

(2) $f_2 = \{(3,1), (4,2), (1,1)\}$

(3) $f_3 = \{(2,1), (3,4), (1,4), (2,1), (4,4)\}$

(4) $f_4 = \{(2,3), (1,6), (4,2), (3,4)\}$

Solución:

Nótese primero que, según la Definición 5-1, un subconjunto f de $V \times V$ es una función $f: V \to V$ si cada $x \in V$ aparece como primer elemento en un par ordenado de f y solo en uno.

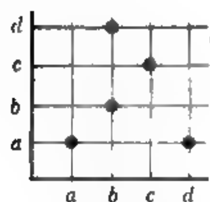
(1) Como dos pares ordenados diferentes $(2, 3) \in f_1$ y $(2, 1) \in f_1$ tienen el mismo primer elemento, f_1 no es una función de V en V.

(2) El elemento $2 \in V$ no aparece como primer elemento en ningún par ordenado perteneciente a f_2. Así, pues, f_2 no es una función de V en V.

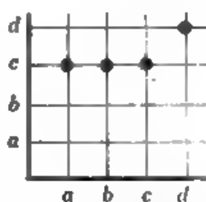
(3) El conjunto f_3 es una función de V en V. Aunque 2 está de primer elemento en dos pares ordenados, estos dos pares son iguales.

(4) Si bien cada elemento de V aparece como primer elemento en uno, y solo en uno, de los pares ordenados de f_4, el conjunto f_4 no es una función de V en V porque f_4 no es un subconjunto de $V \times V$. En efecto, $(1, 6) \in f_4$, pero $(1, 6) \notin V \times V$.

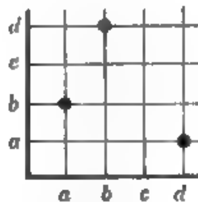
15. Dado $W = \{a, b, c, d\}$, decir en qué casos los siguientes conjuntos de puntos de cada diagrama de coordenadas de $W \times W$ constituyen una función de W en W.



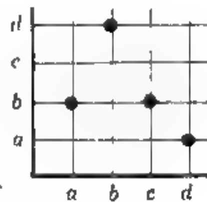
(1)



(2)



(3)



(4)

Solución:

Tener en cuenta primero que un conjunto de puntos en un diagrama de coordenadas es una función siempre que cada recta vertical contenga uno, y solo uno, de los puntos del conjunto.

(1) La vertical por b contiene dos puntos del conjunto; luego el conjunto no es una función de W en W.

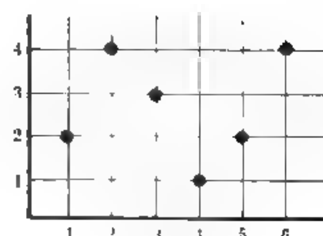
(2) Como cada vertical contiene un punto, y solo uno, del conjunto, este conjunto sí es una función de W en W. El hecho de que la horizontal por c contenga tres puntos no contraría las propiedades de una función.

(3) La vertical por c no contiene ningún punto del conjunto; por tanto, este conjunto no es una función de W en W.

(4) Por la misma razón que en (2), este conjunto sí es una función de W en W.

16. Dados $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $S = \{1, 2, 3, 4\}$, sea g el conjunto de puntos en el diagrama de coordenadas de $R \times S$ que aparece a la derecha y que es una función de R en S

(*a*) Hallar $g(2), g(4), g(6)$. (*b*) Hallar $g^{-1}(2), g^{-1}(3), g^{-1}(4)$.
(*c*) Hallar $\{x \mid x \in R, g(x) < 3\}$.



Solución:

(*a*) Para averiguar $g(2)$ se busca el punto de g que está en la vertical por 2, el punto es $(2, 4)$ y, por tanto, $g(2) = 4$, el segundo elemento del par ordenado

La vertical por 4 contiene al punto $(4, 1)$ de g, así que $g(4) = 1$

La vertical por 6 contiene al punto $(6, 4)$, por tanto, $g(6) = 4$.

(*b*) Para averiguar $g^{-1}(2)$ se buscan los puntos que están sobre la horizontal por 2. Son $(1, 2)$ y $(5, 2)$. $g^{-1}(2)$ consiste en los primeros elementos de estos pares ordenados, esto es, $g^{-1}(2) = \{1, 5\}$. Nótese que los pares ordenados $(1, 2)$ y $(5, 2)$ de g significan que $g(1) = 2$ y $g(5) = 2$.

La horizontal por 3 contiene solamente el punto $(3, 3)$ de g; entonces $g^{-1}(3) = \{3\}$

La horizontal por 4 contiene los puntos $(2, 4)$ y $(6, 4)$ de g. Entonces $g^{-1}(4) = \{2, 6\}$.

(*c*) Notar primeramente que $g(1) = 2, g(2) = 4, g(3) = 3, g(4) = 1, g(5) = 2, g(6) = 4$. El conjunto $\{x \mid x \in R, g(x) < 3\}$ consiste en los elementos de R cuya imagen es menor que 3, es decir, cuya imagen es 1 ó 2. El conjunto es $\{1, 4, 5\}$. Geométricamente, este conjunto es el de los primeros elementos de los puntos de g que quedan debajo de la horizontal por 3.

17. Sea h el conjunto de puntos del diagrama de coordenadas de $E \times F$ que es una función de E en F.

(*a*) Si cada horizontal contiene a lo más un punto de h, ¿qué tipo de función es h?
(*b*) Si cada horizontal contiene al menos un punto de h, ¿qué tipo de función es h?

Solución:

(*a*) Si cada horizontal contiene a lo más un punto de h, entonces, para todo $x \in F$, $h^{-1}(x)$ es vacío o consiste en un elemento de E. Así que h es una función inyectiva.

(*b*) Si cada horizontal contiene al menos un punto de h, entonces, para todo $x \in F$, $h^{-1}(x)$ no es vacío. Luego h es una función sobreyectiva.

18. ¿En qué condiciones el conjunto de pares ordenados

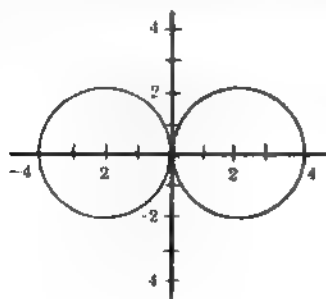
$$f = \{(1, 5), (3, 1), (4, 7), (-2, -3)\}$$

define una función de A en B?

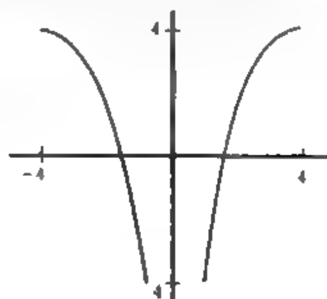
Solución:

El conjunto f definirá una función de A en B si f es un subconjunto de $A \times B$ y si cada elemento de A aparece como primer elemento en un par ordenado de f, y solo en uno. Según esto, A debe ser igual al conjunto de los primeros elementos de f, es decir, $A = \{1, 3, 4, -2\}$; y B debe contener al conjunto de los segundos elementos de f, esto es, $\{5, 1, 7, -3\} \subset B$.

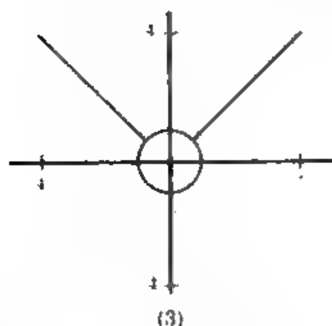
19. Sea $W = [-4, 4]$. Entre los siguientes conjuntos de puntos representados en el diagrama de coordenadas de $W \times W$ decir cuál es o cuál no es una función de W en W.

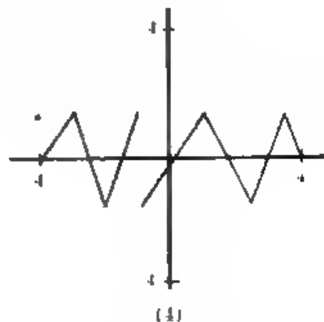


(1)



(2)


(3)


(4)

Solución:

Según la Observación 5-4, tener en cuenta que un conjunto de puntos de un diagrama de coordenadas es una función si cada línea vertical contiene un punto del conjunto, y solo uno.

(1) Como las verticales contienen dos puntos del conjunto, el conjunto de puntos no es una función de W en W.

(2) Como las verticales próximas al eje vertical no contienen ningún punto del conjunto, el conjunto de puntos no es una función de W en W.

(3) Las verticales que cortan el círculo contendrán dos puntos del conjunto: entonces el conjunto de puntos no es una función de W en W.

(4) El conjunto de puntos es una función de W en W porque cada vertical contiene un punto del conjunto, y solo uno.

20. Sea $A = \{a, b, c, d\}$. El conjunto

$$\{(a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$$

es una función inyectiva y sobreyectiva de A en A. Encontrar la función recíproca.

Solución:

Para encontrar la función recíproca, permútense los elementos en cada par ordenado. Así, la función recíproca es

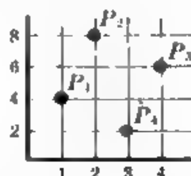
$$\{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$$

Problemas propuestos

PARES ORDENADOS Y CONJUNTOS PRODUCTO

21. Suponiendo que $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$, hallar x e y.

22. Hallar los pares ordenados que corresponden a los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 que aparecen en el diagrama de coordenadas de $\{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 4, 6, 8\}$ que sigue



23. Sea $W = \{$Marcos, Enrique, Pablo$\}$ y sea $V = \{$Enrique, David$\}$. Averiguar (1) $W \times V$, (2) $V \times W$, (3) $V \times V$.

24. Representar, sombreando el área apropiada, cada uno de los conjuntos producto siguientes en un diagrama de coordenadas de $R \times R$.

(1) $[-3, 3] \times [-1, 2]$.
(2) $]-2, 3] \times [-3, \infty[$.
(3) $[-3, 1[\times]-\infty, 2]$.
(4) $[-3, 1[\times]-2, 2]$.

25. Sean $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3, 4\}$. Construir el «diagrama en árbol» de $A \times B \times C$ como en el Problema 7 y averiguar entonces $A \times B \times C$.

26. Sean $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, d\}$ y $W = \{a, d\}$. Construir el «diagrama en árbol» de $S \times T \times W$ y hallar luego $S \times T \times W$.

27. Sean los conjuntos V, W y Z con 3, 4 y 5 elementos, respectivamente. ¿Cuántos elementos hay en (1) $V \times W \times Z$, (2) $Z \times V \times W$, (3) $W \times Z \times V$?

28. Sea $A = B \cap C$. ¿Qué hay cierto en lo que sigue, si lo hay?

(1) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ (2) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$

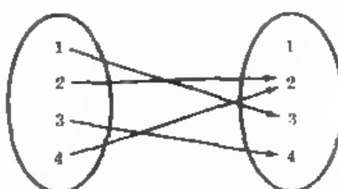
GRAFOS DE FUNCIONES

29. Dados $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función $f : M \to R$ definida por

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

hallar el grafo de f.

30. Sean $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y la función $g : W \to W$ definida por el diagrama



(1) Hallar el grafo de g. (2) Representar el grafo de g en el diagrama de coordenadas de $W \times W$.

31. Sea la función $h : R \to R$ definida por la fórmula

$$h(x) = 2x - 1$$

Decir si los siguientes pares ordenados pertenecen o no al grafo de h:
(*a*) (3, 5), (*b*) (−2, −5), (*c*) (−4, −7), (*d*) (8, 17), (*e*) (−3, −5), (*f*) (4, 7).

32. Sea la función g que asigna a cada nombre del conjunto

{Berta, Martín, David, Abel, Rebeca}

el número de letras distintas que se necesitan para escribir el nombre. Hallar el grafo de g.

33. Cada una de las siguientes fórmulas define una función de R en R. Hacer el grafo de cada función en el diagrama cartesiano de $R \times R$.

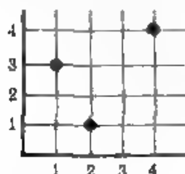
(1) $f(x) = 2x - 1$, (3) $f(x) = |x|$,
(2) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (4) $f(x) = x - 2|x|$

FUNCIONES COMO PARES ORDENADOS

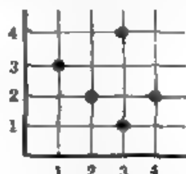
34. Sea $W = \{a, b, c, d\}$. Decir de los siguientes conjuntos de pares ordenados cuáles son y cuáles no son funciones de W en W.

(1) $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$ (3) $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$
(2) $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$ (4) $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)\}$

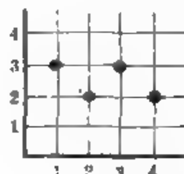
35. Dado $V = \{1, 2, 3, 4\}$ decir cuáles de los conjuntos de puntos de los siguientes diagramas de coordenadas de $V \times V$ son o no funciones de V en V.



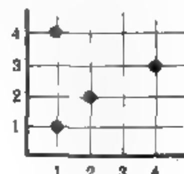
(1)



(2)

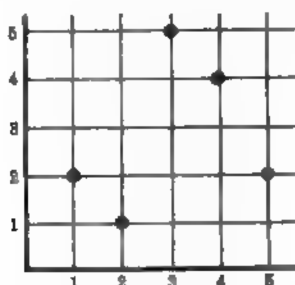


(3)

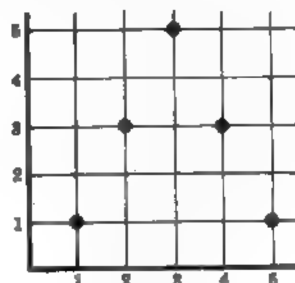


(4)

36. Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, f, el conjunto de puntos que se representan en primer diagrama de $A \times A$ y g el conjunto de puntos representados en el segundo diagrama.



Representación de f



Representación de g

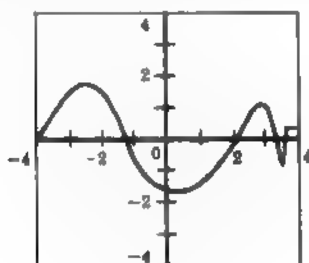
Resulta que f y g son funciones de A en A. Averiguar:

(1) $f(3)$ (3) $f^{-1}(2)$ (5) $f^{-1}(4)$ (7) función producto $f \circ g$ (9) $\{x \mid f(x) \leq 4\}$

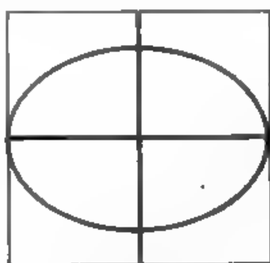
(2) $g(5)$ (4) $g^{-1}(1)$ (6) función producto $g \circ f$ (8) $f^{-1}(\{1, 2\})$ (10) $\{x \mid g(x) > 2\}$

37. Sea la función $f: A \to B$ representada en un diagrama de coordenadas de $A \times B$. ¿Qué propiedad geométrica tiene f si (1) f es inyectiva, (2) f es una función constante, (3) si f es sobreyectiva, (4) si f tiene una recíproca f^{-1}?

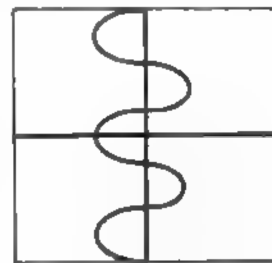
38. Dado $B = [-4, 4]$, decir cuándo los puntos representados en cada uno de los diagramas de coordenadas de $B \times B$ que siguen es una función de B en B.



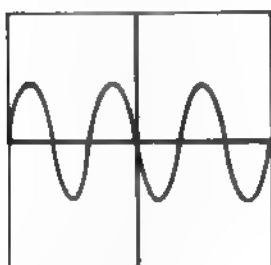
(1)



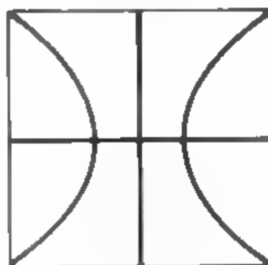
(2)



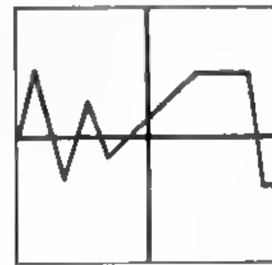
(3)



(4)



(5)



(6)

PROBLEMAS DIVERSOS

39. Representar sombreando el área apropiada, cada uno de los conjuntos productos que siguen en un diagrama cartesiano de $R \times R$

(1) $\{x \mid -3 < x < 2\} \times \{x \mid -2 < x < 4\}$

(2) $\{x \mid |x| < 3\} \times \{x \mid |x| < 1\}$

(3) $\{x \mid |x| < 2\} \times \{x \mid x > -3\}$

(4) $\{x \mid x < 1\} \times \{x \mid -2 < x < 3\}$

(5) $\{x \mid x > -2\} \times \{x \mid x \leq 3\}$

40. Cada una de las fórmulas que siguen define una función de R en R. Representar cada una de estas funciones en un diagrama cartesiano de $R \times R$

(1) $f(x) = 4x - x^2$ (2) $f(x) = x + 2|x|$ (3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } |x| \leq 2 \\ 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Respuestas a los problemas propuestos

21. $x = 2$, $y = 3$

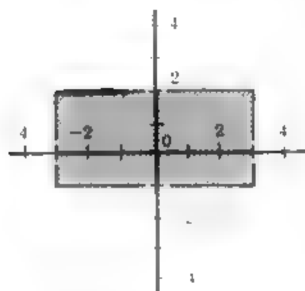
22 $P_1 = (1, 4)$, $P_2 = (2, 8)$, $P_3 = (4, 6)$, $P_4 = (3, 2)$

23. (1) $W \times E$ = {(Marcos, Enrique), (Marcos, David), (Enrique, Enrique), (Enrique, David), (Pablo, Enrique), (Pablo, David)}

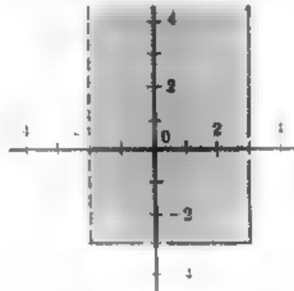
(2) $E \times W$ = {(Enrique, Marcos), (David, Marcos), (Enrique, Enrique), (David, Enrique), (Enrique, Pablo), (David, Pablo)}

(3) $E \times E$ = {(Enrique, Enrique), (Enrique, David), (David, Enrique), (David, David)}

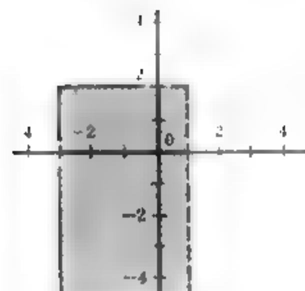
24. (1)



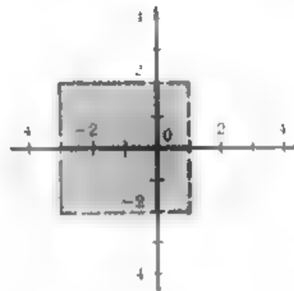
(2)



(3)



(4)



25. Ver Fig. 5-11

$$A \times B \times C = \{(2,1,3), (2,1,4), (2,3,3), (2,3,4), (2,5,3), (2,5,4), (3,1,3), (3,1,4), (3,3,3), (3,3,4), (3,5,3), (3,5,4)\}$$

26. Ver Fig. 5-12

$$S \times T \times W = \{(a,b,a), (a,b,d), (a,c,a), (a,c,d), (a,d,a), (a,d,d), (b,b,a), (b,b,d), (b,c,a), (b,c,d), (b,d,a), (b,d,d), (c,b,a), (c,b,d), (c,c,a), (c,c,d), (c,d,a), (c,d,d)\}$$

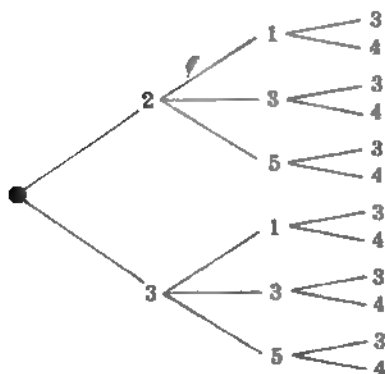


Fig. 5-11

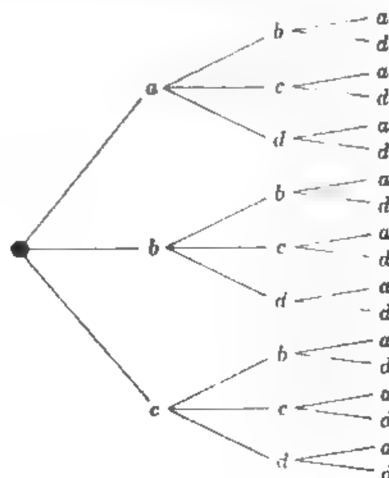


Fig. 5-12

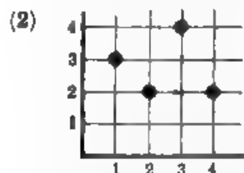
27. Cada uno tiene 60 elementos.

28. Ambas son ciertas.

$$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C) = (B \times C) \cap (C \times B)$$

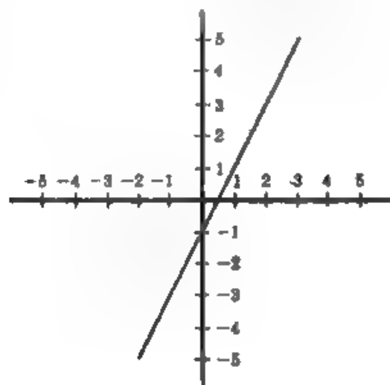
29. $\{(1, 2), (2, 7), (3, 14), (4, 23), (5, 34)\}$

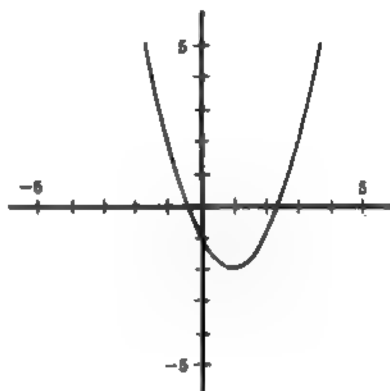
30. (1) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 2)\}$

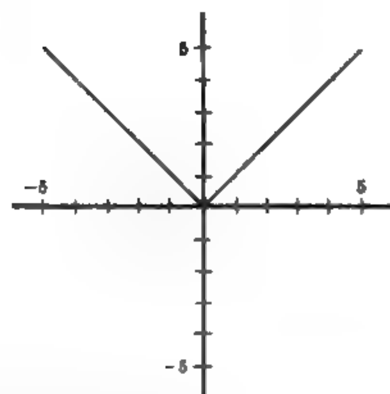
(2) 

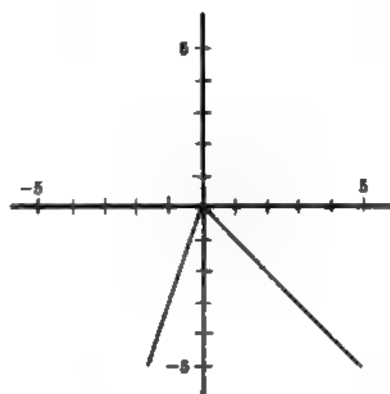
31. (*a*) Sí, (*b*) Sí, (*c*) No, (*d*) No, (*e*) No, (*f*) Sí.

32. {(Berta, 4), (Martín, 6), (David, 4), (Abel, 4), (Rebeca, 5)}.

33. (1) 

(2) 

(3) 

(4) 

34. (1) Sí, (2) No, (3) Sí, (4) No.

35. (1) No, (2) No, (3) Sí, (4) No.

36.
(1) 5
(2) 1
(3) $\{1, 5\}$
(4) $\{1, 5\}$
(5) $\{4\}$
(6) $\{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 3), (5, 3)\}$
(7) $\{(1, 2), (2, 5), (3, 2), (4, 5), (5, 2)\}$
(8) $\{1, 2, 5\}$
(9) $\{1, 2, 4, 5\}$
(10) $\{2, 3, 4\}$

37.
(1) Cada horizontal contiene a lo más un punto.
(2) Una horizontal contiene todos los puntos.
(3) Cada horizontal contiene al menos un punto.
(4) Cada horizontal contiene un punto, y solo uno.

38. (1) Sí, (2) No, (3) No, (4) Sí, (5) No, (6) Sí.

Capítulo 6

Relaciones

FUNCIONES LOGICAS, ENUNCIADOS FORMALES

Se llama *función lógica* definida sobre el producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos A y B, una expresión denotada por

$$P(x, y)$$

que se caracteriza porque cuando en $P(x, y)$ se sustituyen las variables x e y, respectivamente, por a y b, se convierte en un enunciado ya verdadero, ya falso, para todo par ordenado $(a, b) \in A \times B$. Por ejemplo, si A es el conjunto de autores y B el de dramas, entonces

$$P(x, y) = \text{«}x \text{ escribió } y\text{»}$$

es una función lógica sobre $A \times B$. Por ejemplo:

P(Shakespeare, *Hamlet*) = «Shakespeare escribió el *Hamlet*»
P(Shakespeare, *Fausto*) = «Shakespeare escribió el *Fausto*»

son verdadero y falso, respectivamente.

La expresión misma $P(x, y)$ se dice *enunciado formal en dos variables*, o simplemente, *enunciado formal*. Ejemplos de enunciados formales son los siguientes:

Ejemplo 1-1: «x es menor que y».

Ejemplo 1-2: «x pesa y kilos».

Ejemplo 1-3: «x divide a y».

Ejemplo 1-4: «x es la esposa de y».

Ejemplo 1-5: «El cuadrado de x más el cuadrado de y da dieciséis», o sea «$x^2 + y^2 = 16$»

Ejemplo 1-6: «El triángulo x es semejante al triángulo y»

En todos estos ejemplos hay dos variables, pero también pueden darse enunciados en una variable, como «x está en las Naciones Unidas», o en más de dos variables, como «x por y igual z»

RELACIONES

Una *relación* $\mathcal{R}$ consiste en lo siguiente:

(1) Un conjunto A.
(2) Un conjunto B.
(3) Un enunciado formal $P(x, y)$ tal que $P(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado (a, b) de $A \times B$.

Se dice entonces que $\mathcal{R}$ es una *relación entre A y B* y se la denota por

$$\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$$

Además, si $P(a, b)$ es verdadero, se escribe

$$a \,\mathcal{R}\, b$$

que se lee «a está relacionado con b», y si $P(a, b)$ es falso, se escribe

$$a \not\mathcal{R}\, b$$

que se lee «a no está relacionado con b».

Ejemplo 2-1: Sea $\mathcal{R}_1 = (R, R, P(x, y))$, donde $P(x, y)$ se supone significar «x es menor que y». Es claro que $\mathcal{R}_1$ es una relación, porque $P(a, b)$, o lo que es lo mismo, «$a < b$», es verdadero o falso para todo par ordenado (a, b) de números reales. Así, pues, como $P(2, \pi)$ es verdadero, se puede escribir

$$2 \,\mathcal{R}_1\, \pi$$

y puesto que $P(5, \sqrt{2})$ es falso,

$$5 \not\mathcal{R}_1 \sqrt{2}$$

Ejemplo 2-2: Sea $\mathcal{R}_2 = (A, B, P(x, y))$, donde A es el conjunto de los hombres, B es el conjunto de las mujeres y $P(x, y)$ es «x es el marido de y». $\mathcal{R}_2$ es una relación ciertamente.

Ejemplo 2-3: Sea $\mathcal{R}_3 = (N, N, P(x, y))$, donde N es el conjunto de los números naturales y $P(x, y)$ se lee «x divide a y». $\mathcal{R}_3$ es entonces una relación y evidentemente

$$3 \,\mathcal{R}_3\, 12, \quad 2 \not\mathcal{R}_3\, 7, \quad 5 \,\mathcal{R}_3\, 15, \, 6 \not\mathcal{R}_3\, 13$$

Ejemplo 2-4: Sea $\mathcal{R}_4 = (A, B, P(x, y))$, siendo A el conjunto de los hombres, B el de las mujeres y $P(x, y)$ quiere decir «x divide a y». Aquí $\mathcal{R}_4$ no es una relación, pues $P(a, b)$ carece de significado si a es un hombre y b una mujer.

Ejemplo 2-5: Sea $\mathcal{R}_5 = (N, N, P(x, y))$, siendo N los números naturales y donde $P(x, y)$ significa «x es menor que y». Aquí $\mathcal{R}_5$ es una relación

Es de observar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_5$ no son la misma relación, pese a venir ambas definidas por el mismo enunciado formal.

Sea $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$ una relación. Se dice que el enunciado formal $P(x, y)$ *define una relación* entre A y B. Además, si $A = B$, se dice que $P(x, y)$ define una relación en A o que $\mathcal{R}$ es una relación en A.

Ejemplo 2-6: El enunciado formal $P(x, y)$, que se lee «x es menor que y», define una relación en los números racionales.

Ejemplo 2-7: El enunciado formal «x es el esposo de y» define una relación entre el conjunto de hombres y el conjunto de mujeres.

Terminología: Hay autores que llaman relación a la expresión $P(x, y)$, dando por sentado implícitamente que las variables x e y tienen por dominios respectivos ciertos conjuntos A y B, es decir, que $P(x, y)$ es una función lógica definida sobre cierto conjunto producto $A \times B$. Aquí se mantendrá la denominación ya dicha, donde $P(x, y)$ es simplemente un enunciado formal y, por tanto, una relación consiste en $P(x, y)$ y dos conjuntos dados A y B.

CONJUNTOS DE SOLUCION Y GRAFOS DE RELACIONES

Sea $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$ una relación. El conjunto de los elementos (a, b) de $A \times B$ para los cuales $P(a, b)$ es verdadero, se llama *conjunto solución* $\mathcal{R}^*$ de la relación $\mathcal{R}$. Es decir,

$$\mathcal{R}^* = \{(a, b) \mid a \in A, \; b \in B, \; P(a, b) \text{ es cierto}\}$$

Es claro que $\mathcal{R}^*$, conjunto solución de una relación $\mathcal{R}$ entre A y B, es un subconjunto de $A \times B$. Por tanto, $\mathcal{R}^*$ se puede representar o mostrar en el diagrama de coordenadas de $A \times B$.

El *grafo* de una relación $\mathcal{R}$ entre A y B consta de los puntos del diagrama de coordenadas de $A \times B$ que pertenecen al conjunto solución de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 3-1: Sea $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$, donde $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $P(x, y)$ significa «x divide a y». Entonces el conjunto solución de $\mathcal{R}$ es

$$\mathcal{R}^* = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

En el diagrama de coordenadas de $A \times B$ que aparece en la Fig. 6-1 se muestra el conjunto solución de $\mathcal{R}$.

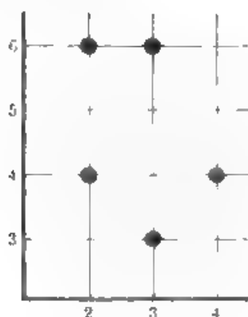
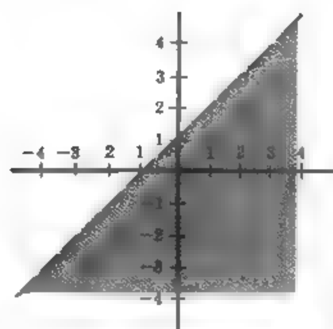


Fig. 6-1



$\mathcal{R}^*$ en sombreado

Fig. 6-2

Ejemplo 3-2: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los números reales por

$$y < x + 1$$

La porción sombreada del diagrama cartesiano de $R \times R$ en la Fig 6-2 consiste en los puntos que pertenecen a $\mathcal{R}^*$, conjunto solución de $\mathcal{R}$, o sea que es el grafo de $\mathcal{R}$.

Nótese que $\mathcal{R}^*$ está formado por los puntos debajo de la recta $y = x + 1$. La recta $y = x + 1$ se representa en línea de trazos para indicar que los puntos de esa recta no pertenecen a $\mathcal{R}^*$.

RELACIONES COMO CONJUNTOS DE PARES ORDENADOS

Sea $\mathcal{R}^*$ un subconjunto de $A \times B$. Puede definirse una relación $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$, donde $P(x, y)$ signifique

«El par ordenado (x, y) pertenece a $\mathcal{R}^*$»

El conjunto de solución de esta relación $\mathcal{R}$ es el conjunto original $\mathcal{R}^*$. Así, a toda relación $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$ corresponde un conjunto de solución único, $\mathcal{R}^*$, que es un subconjunto de $A \times B$, y a cada subconjunto $\mathcal{R}^*$ de $A \times B$ corresponde una relación $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$ de la cual es $\mathcal{R}^*$ el conjunto de solución. En vista de esta correspondencia inyectiva y sobreyectiva entre relaciones $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$ y subconjuntos $\mathcal{R}^*$ de $A \times B$, se puede definir también una relación así:

Definición 6-1: Una relación $\mathcal{R}$ entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.

Si bien la Definición 6-1 de una relación puede parecer artificiosa, tiene sin embargo, la ventaja de que no se sirve de conceptos no definidos como «enunciado formal» y «variable» para definir una relación.

Ejemplo 4-1: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

es una relación entre A y B. Se tiene

$$1\,\mathcal{R}\,a, \quad 2\not\mathcal{R}\,b, \quad 3\,\mathcal{R}\,a; \quad 3\not\mathcal{R}\,b$$

Ejemplo 4-2: Sea $W = \{a, b, c\}$. Entonces

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\}$$

es una relación, y entonces

$$a\not\mathcal{R}\,a, \quad b\not\mathcal{R}\,a, \quad c\,\mathcal{R}\,c, \quad a\,\mathcal{R}\,b$$

Ejemplo 4-3: Sea

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, y < x^2\}$$

Así que $\mathcal{R}$ es un conjunto de pares ordenados de números reales, o sea que es un subconjunto de $R \times R$. Por consiguiente, $\mathcal{R}$ es una relación en los numeros reales que se podría definir asimismo por

$$\mathcal{R} = (R, R, P(x, y))$$

habiendose de leer $P(x, y)$ «y es menor que x^2»

Observación 6-1: Si el conjunto A tiene m elementos y el B tiene n elementos, hay entonces 2^{mn} relaciones distintas entre A y B, porque $A \times B$, que tiene mn elementos, tiene 2^{mn} subconjuntos diferentes.

RELACIONES RECIPROCAS

Toda relacion $\mathcal{R}$ entre A y B tiene una relación reciproca $\mathcal{R}^{-1}$ entre B y A, que se define por

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Es decir, la relacion reciproca $\mathcal{R}^{-1}$ consta de los pares ordenados que al ser invertidos, es decir, permutados, pertenecen a $\mathcal{R}$.

Ejemplo 5-1: *Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces*

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

es una relación entre A y B. La relacion reciproca de la $\mathcal{R}$ es

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$$

Ejemplo 5-2: *Sea $W = \{a, b, c\}$. Entonces*

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\}$$

es una relación en W. La relación reciproca de esta $\mathcal{R}$ es

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, c), (b, c)\}$$

RELACIONES REFLEXIVAS

Sea $\mathcal{R} = (A, A, P(x, y))$ una relación en un conjunto A, es decir, sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times A$. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *relación reflexiva* si, para todo $a \in A$,

$$(a, a) \in \mathcal{R}$$

o lo que es lo mismo, $\mathcal{R}$ es reflexiva si todo elemento de A esta relacionado consigo mismo.

Ejemplo 6-1: Sean $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

Esta $\mathcal{R}$ no es una relación reflexiva, ya que $(2, 2)$ no pertenece a $\mathcal{R}$. Téngase en cuenta que todos los pares ordenados (a, a) deben pertenecer a $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}$ sea reflexiva.

Ejemplo 6-2: Sea A el conjunto de triángulos del plano euclidiano. La relación $\mathcal{R}$ definida en A por el enunciado formal «x es semejante a y» es una relación reflexiva porque todo triángulo es semejante a sí mismo.

Ejemplo 6-3: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los números reales por el enunciado formal «x es menor que y», es decir, «$x < y$». Aquí $\mathcal{R}$ no es reflexiva, puesto que $a \nless a$ para todo número real a.

Ejemplo 6-4: Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos y sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathscr{A}$ por «x es un subconjunto de y». Esta relación $\mathcal{R}$ es reflexiva porque todo conjunto es subconjunto de si mismo.

RELACIONES SIMETRICAS

Sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times A$, es decir, sea $\mathcal{R}$ una relación en A. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *relación simétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (b, a) \in \mathcal{R}$$

esto es, que si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a.

Ejemplo 7-1: Sean $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}$$

Aquí $\mathcal{R}$ no es una relación simétrica, puesto que

$$(2, 3) \in \mathcal{R} \quad \text{pero} \quad (3, 2) \notin \mathcal{R}$$

Ejemplo 7-2: Sea A el conjunto de los triángulos del plano euclidiano, y sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por el enunciado formal «x es semejante a y». Entonces $\mathcal{R}$ es simétrica, puesto que si el triángulo a es semejante al triángulo b, entonces el triángulo b es también semejante al a.

Ejemplo 7-3: Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales N que viene definida por «x divide a y». Esta $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues si 2 divide a 4, 4 no divide a 2. Es decir,

$$(2, 4) \in \mathcal{R} \quad \text{pero} \quad (4, 2) \notin \mathcal{R}$$

Observación 6-2: Como $(a, b) \in \mathcal{R}$ implica que (b, a) pertenece a la relación recíproca $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}$ es una relación simétrica si, y solamente si,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$$

RELACIONES ANTISIMETRICAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A, o sea un subconjunto de $A \times A$, se dice *relación antisimétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, a) \in \mathcal{R} \quad \text{implican} \quad a = b$$

O, en otras palabras, si $a \neq b$, entonces puede a estar relacionado con b, o bien b relacionado con a, pero no las dos cosas.

Ejemplo 8-1: Sea N el conjunto de los números naturales y $\mathcal{R}$ sea la relación definida en N por «x divide a y». Esta $\mathcal{R}$ es antisimétrica, puesto que a divide a b y b divide a a implican $a = b$.

Ejemplo 8-2: Sea $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (4, 2), (4, 4), (2, 4)\}$$

no es una relación antisimétrica en W, pues

$$(4, 2) \in \mathcal{R} \quad \text{y} \quad (2, 4) \in \mathcal{R}$$

Ejemplo 8-3: Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathscr{A}$ por «x es un subconjunto de y». Esta relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica porque

$$A \subset B \text{ y } B \subset A \quad \text{implica} \quad A = B$$

Observación 6-3: Sea D la *diagonal* de $A \times A$, esto es, el conjunto de todos los pares ordenados $(a, a) \in A \times A$. Entonces una relación $\mathcal{R}$ en A es antisimétrica si, y solamente si,

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset D$$

RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se dice *relación transitiva si*

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, c) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (a, c) \in \mathcal{R}$$

O sea que si a está relacionado con b, y b está relacionado con c, entonces a esta relacionado con c.

Ejemplo 9-1: Sea A el conjunto de gentes de la Tierra. Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por el enunciado formal «x ama a y». Si a ama a b y b ama a c, no se sigue necesariamente que a ama a c. Así que $\mathcal{R}$ no es una relación transitiva.

Ejemplo 9-2: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los números reales por «x es menor que y». Entonces, como ya se ha demostrado,

$$a < b \text{ y } b < c \quad \text{implica} \quad a < c$$

Por tanto, $\mathcal{R}$ es una relación transitiva.

Ejemplo 9-3: Sea $W = \{a, b, c\}$ y sea

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (c, b), (b, a), (a, c)\}$$

Esta relación $\mathcal{R}$ no es transitiva porque

$$(c, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, a) \in \mathcal{R} \quad \text{pero} \quad (c, a) \notin \mathcal{R}$$

Ejemplo 9-4: Dada $\mathcal{A}$, una familia de conjuntos, sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{A}$ por «x es un subconjunto de y». Aquí $\mathcal{R}$ es una relación transitiva porque

$$A \subset B \text{ y } B \subset C \quad \text{implica} \quad A \subset C$$

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de equivalencia* si

(1) $\mathcal{R}$ es reflexiva, esto es, para todo $a \in A$, $(a, a) \in \mathcal{R}$.
(2) $\mathcal{R}$ es simétrica, esto es, $(a, b) \in \mathcal{R}$ implica $(b, a) \in \mathcal{R}$.
(3) $\mathcal{R}$ es transitiva, esto es, $(a, b) \in \mathcal{R}$, y $(b, c) \in \mathcal{R}$ implican $(a, c) \in \mathcal{R}$

Más adelante se hará un estudio más completo de las relaciones de equivalencia en conjuntos. Baste ahora con dos ejemplos de relaciones de equivalencia.

Ejemplo 10-1: Sea A el conjunto de triángulos del plano euclidiano. Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por «x es semejante a y». Entonces, como se demuestra en geometría, $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva y, por tanto, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 10-2: El ejemplo más importante de relación de equivalencia es el de la «igualdad». Para cualesquiera elementos en todo conjunto:

(1) $a = a$,
(2) $a = b$ implica $b = a$,
(3) $a = b$ y $b = c$ implican $a = c$.

DOMINIO DE DEFINICION Y DOMINIO DE IMAGENES DE UNA RELACION

Sea $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, es decir, sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times B$. El *dominio de definición* D o dominio simplemente de la relación $\mathcal{R}$ es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a $\mathcal{R}$, o sea

$$D = \{a \mid a \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

El *dominio de imágenes* E de la relación $\mathcal{R}$ consiste en todos los segundos elementos que aparecen en los pares ordenados, o sea

$$E = \{b \mid b \in B, (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

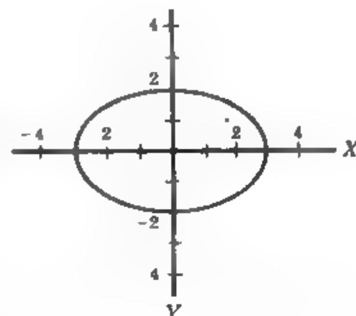
Se ve que el dominio de definición de una relación entre A y B es un subconjunto de A y que su dominio de imágenes es un subconjunto de B.

Ejemplo 11-1: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(2, a), (4, a), (4, c)\}$$

Aquí el dominio de definición de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{2, 4\}$ y el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{a, c\}$.

Ejemplo 11-2: Sea la relación $\mathcal{R}$ definida en los números reales por el enunciado formal «$4x^2 + 9y^2 = 36$». Se muestra $\mathcal{R}$ en el diagrama de coordenadas cartesianas de $R \times R$ en la figura de la derecha. El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.



Observación 6-4: Sea una relación $\mathcal{R}$ entre A y B representada en un diagrama de coordenadas de $A \times B$. Entonces $a \in A$ está en el dominio de $\mathcal{R}$ si, y solamente si, la vertical por a contiene un punto del grafo de $\mathcal{R}$. Asimismo, $b \in B$ está en el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ si, y solamente si, la horizontal por b contiene un punto del grafo de $\mathcal{R}$.

RELACIONES Y FUNCIONES

Repitamos la

Definición 5-1: Una función f de A en B es un subconjunto de $A \times B$ en el cual cada $a \in A$ aparece como primer elemento en un par ordenado de f y solo en uno.

Como todo subconjunto de $A \times B$ es una relación, una función es un tipo especial de relación. Así, por ejemplo, los términos «dominio de definición» y «dominio de imágenes» aparecen tanto en el estudio de las funciones como en el de las relaciones.

Problema importante es en matemáticas el determinar si una relación $\mathcal{R}$ definida en los números reales por una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0$$

es o no una función. Es decir, dada la relación definida por

$$F(x, y) = 0$$

¿define una función $y = f(x)$ esta relación?

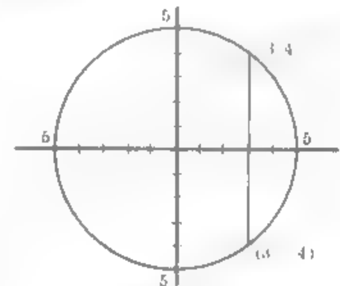
En general, este problema es en extremo difícil. Aquí solo se está en posibilidad de resolver tal pregunta en el caso de ecuaciones muy sencillas.

Ejemplo 12-1: Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números reales definida por

$$x^2 + y^2 = 25$$

$\mathcal{R}$ se representa en el diagrama cartesiano $R \times R$ de la Figura 6-3.

$\mathcal{R}$ es un círculo de radio 5 con el centro en el origen. Hay, pues, muchas verticales que contienen más de un punto de $\mathcal{R}$ y así $(3, 4) \in \mathcal{R}$ y también $(3, -4) \in \mathcal{R}$, de modo que la relación $\mathcal{R}$ no es una función.



Representación de $\mathcal{R}$

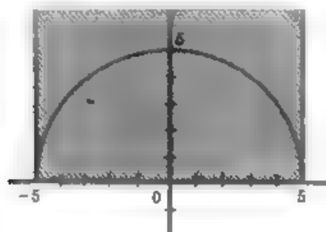
Fig. 6-3

Ejemplo 12-2: Sean $A = [-5, 5]$, $B = [0, \infty[$ y sea $\mathcal{R}$ la relación entre A y B definida por

$$x^2 + y^2 = 25$$

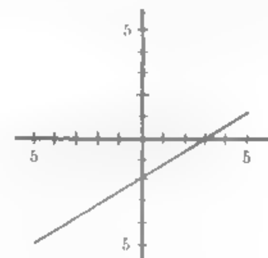
$\mathcal{R}$ se representa en el diagrama de $A \times B$ de la Figura 6-4.

$\mathcal{R}$ es la mitad superior de un círculo, pero aquí cada vertical contiene un punto, y solo uno, de $\mathcal{R}$; por tanto, $\mathcal{R}$ es una función.



$A \times B$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-4



Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-5

Ejemplo 12-3: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los números reales por

$$2x - 3y = 6$$

y que se representa $\mathcal{R}$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$ de la Fig. 6-5. Aquí $\mathcal{R}$ es una recta y cada vertical contiene un punto, y solo uno, de $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ es, pues, una función. Además, expresando y por x en la ecuación anterior, se tiene una fórmula que define la función $\mathcal{R}$:

$$y = f(x) = \frac{2x - 6}{3}$$

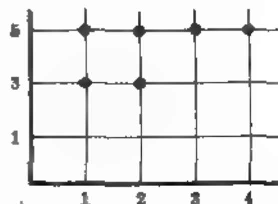
Problemas resueltos

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS RELACIONES

1. Sea $\mathcal{R}$ la relación entre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$ definida por el enunciado formal «x es menor que y».

(1) Encontrar el conjunto de solución de $\mathcal{R}$, esto es, escribir $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados.

(2) Representar $\mathcal{R}$ en un diagrama de coordenadas de $A \times B$.



Solución:

(1) $\mathcal{R}$ es el conjunto de los pares ordenados $(a, b) \in A \times B$ para los cuales $a < b$, entonces

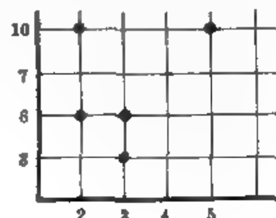
$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

(2) $\mathcal{R}$ se representa en el diagrama de coordenadas de $A \times B$ en la figura de la derecha.

2. Sea $\mathcal{R}$ la relación entre $E = \{2, 3, 4, 5\}$ y $F = \{3, 6, 7, 10\}$ definida por el enunciado formal «x divide a y»

(1) Escribir $\mathcal{R}$ como conjunto de pares ordenados, es decir, hallar el conjunto de solución de $\mathcal{R}$

(2) Representar $\mathcal{R}$ en un diagrama de coordenadas de $E \times F$.



Solución:

(1) Examínense los dieciséis elementos de $E \times F$ y elíjanse aquellos pares ordenados en que el primer elemento divida al segundo; entonces

$$\mathcal{R} = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$$

(2) *$\mathcal{R}$ aparece representada en el diagrama de coordenadas de $E \times F$* en la figura de la derecha.

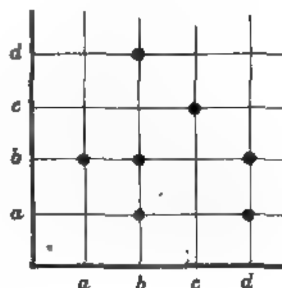
3. Sea $M = \{a, b, c, d\}$ y sea una relación $\mathcal{R}$ en M representada por los puntos que se muestran en el diagrama de coordenadas de $M \times M$ en la figura de la derecha.

(1) Decir qué es verdadero y qué falso en lo que sigue:

(a) $c \,\mathcal{R}\, b$, (b) $d \,\not\mathcal{R}\, a$, (c) $a \,\not\mathcal{R}\, c$, (d) $b \,\not\mathcal{R}\, b$

(2) Hallar $\{x \mid (x, b) \in \mathcal{R}\}$, es decir, encontrar todos los elementos de M que están relacionados con b.

(3) Hallar $\{x \mid (d, x) \in \mathcal{R}\}$, esto es, encontrar todos los elementos de M que se relacionan con d.



Solución:

(1) Notar primero que $x \,\mathcal{R}\, y$ es verdadero si, y solamente si, (x, y) pertenece a $\mathcal{R}$

(a) Falso, pues $(c, b) \notin \mathcal{R}$. (c) Verdadero, pues $(a, c) \notin \mathcal{R}$

(b) Falso, pues $(d, a) \in \mathcal{R}$. (d) Falso, pues $(b, b) \in \mathcal{R}$.

(2) La horizontal por b contiene todos los puntos de $\mathcal{R}$ en los que b aparece de segundo elemento, contiene los pares ordenados (a, b), (b, b) y (d, b) de $\mathcal{R}$. Así que el conjunto pedido es $\{a, b, d\}$

(3) La vertical por d contiene todos los puntos de $\mathcal{R}$ en que d aparece como primer elemento, contiene los puntos (d, a) y (d, b) de $\mathcal{R}$. Así que $\{a, b\}$ es el conjunto pedido.

4. Cada uno de los enunciados formales siguientes define una relación en los números reales. Representar cada relación en un diagrama cartesiano de $R \times R$.

(1) $y = x^2$ (3) $y < 3 - x$ (5) $y \geq x^3$

(2) $y \leq x^2$ (4) $y \geq \operatorname{sen} x$ (6) $y > x^3$

Solución:

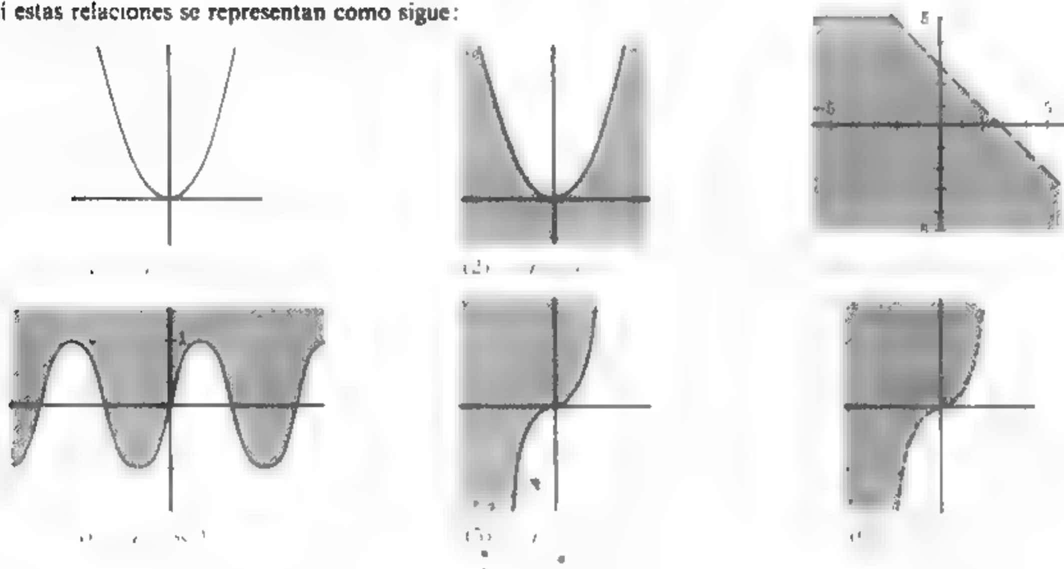
Para representar una relación en los números reales definida por un enunciado formal tal como

(a) $y = f(x)$
(b) $y > f(x)$
(c) $y \geq f(x)$
(d) $y < f(x)$
(e) $y \leq f(x)$

lo primero representar $y = f(x)$ como es usual. Entonces la relación, o sea el conjunto buscado, constara de los puntos

(a) de $y = f(x)$
(b) encima de $y = f(x)$
(c) encima de y en $y = f(x)$
(d) debajo de $y = f(x)$
(e) debajo de y en $y = f(x)$

Y así estas relaciones se representan como sigue:



Obsérvese de nuevo que la curva $y = f(x)$ se hace con trazos si los puntos de $y = f(x)$ no pertenecen a la relación.

5. Cada uno de los enunciados formales que siguen define una relación en los números reales. Representar cada relación en el diagrama cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

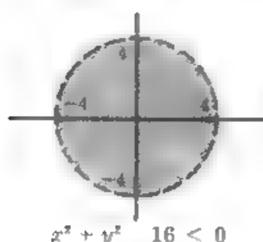
(1) $x^2 + y^2 < 16$ (ó $x^2 + y^2 - 16 < 0$) (3) $x^2 + y^2 \geq 16$
(2) $x^2 - 4y^2 \geq 9$ (ó $x^2 - 4y^2 - 9 \geq 0$) (4) $x^2 - 4y^2 < 9$

Solución:

Para representar gráficamente una relación en los números reales definida por un enunciado formal del tipo $f(x, y) < 0$ (o $\leq$, $>$, $\geq$) representar primero $f(x, y) = 0$. La curva $f(x, y) = 0$, en los casos simples, divide el plano en varias regiones. La relación contendrá todos los puntos de una o más regiones posiblemente. Ensayar con uno o más puntos de cada región para determinar si *todos* los puntos de la región pertenecen o no a la relación.

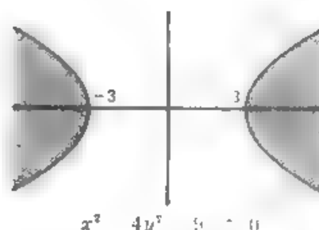
La representación de cada una de las relaciones anteriores es como sigue:

(1)



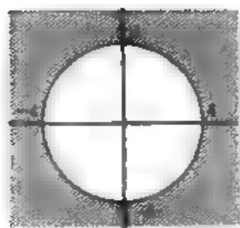
$x^2 + y^2 - 16 < 0$

(2)



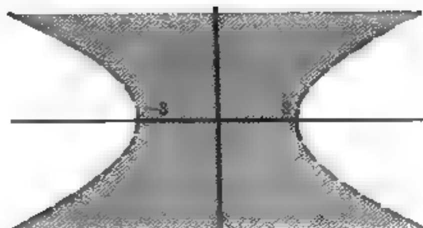
$x^2 - 4y^2 - 9 \geq 0$

(3)



$x^2 + y^2 > 16$

(4)



$x^2 - 4y^2 < 9$

DOMINIOS DE DEFINICION, DOMINIOS DE IMAGENES Y RECIPROCAS

6. Sea la relación $\mathcal{R} = \{(1, 5), (4, 5), (1, 4), (4, 6), (3, 7), (7, 6)\}$.
Averiguar (1) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (2) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (3) la recíproca de $\mathcal{R}$

Solución:

(1) El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es el conjunto de los primeros elementos de $\mathcal{R}$; ese dominio de $\mathcal{R}$ es

$$\{1, 4, 3, 7\}$$

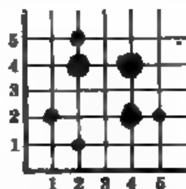
(2) El dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ es el conjunto de los segundos elementos de $\mathcal{R}$, así que este dominio de imágenes es

$$\{5, 4, 6, 7\}$$

(3) La recíproca de $\mathcal{R}$ consiste en los mismos pares que $\mathcal{R}$, pero en orden inverso, entonces

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(5, 1), (5, 4), (4, 1), (6, 4), (7, 3), (6, 7)\}$$

7. Sea $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea una relación $\mathcal{R}$ en T representada por el conjunto de puntos que se indican en el siguiente diagrama de coordenadas de $T \times T$.



Hallar (1) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (2) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (3) la recíproca de $\mathcal{R}$. (4) Representar $\mathcal{R}^{-1}$ en el diagrama de coordenadas de $T \times T$.

Solución:

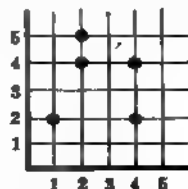
(1) El elemento $x \in T$ esta en el dominio de definición de $\mathcal{R}$ si, y solamente si, la vertical por x contiene un punto de $\mathcal{R}$. Así que el dominio de definición de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{2, 4, 5\}$, pues la vertical por cada uno de estos elementos, y solo por éstos, contiene puntos de $\mathcal{R}$.

(2) El elemento $x \in T$ está en el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ si, y solamente si, la horizontal por x contiene un punto de $\mathcal{R}$. Así que dicho dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ es el conjunto $\{1, 2, 4\}$, pues la horizontal por cada uno de estos elementos, y solo por éstos, contiene al menos un punto de $\mathcal{R}$.

(3) Como

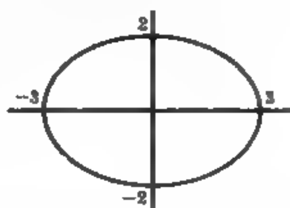
$$\mathcal{R} = \{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$$
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 2), (4, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 5)\}$$

(4) $\mathcal{R}^{-1}$ se representa en el diagrama de coordenadas de $T \times T$ como sigue:



Representación de $\mathcal{R}^{-1}$

8. Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ 4x^2 + 9y^2 = 36\}$. La representación de $\mathcal{R}$ en el diagrama de $R \times R$ es



Hallar (1) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (2) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (3) $\mathcal{R}^{-1}$.

Solución:

(1) El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es el intervalo $[-3, 3]$, pues la vertical por cada uno de estos numeros, y solo estos, contiene al menos un punto de $\mathcal{R}$.

(2) El dominio de imagenes de $\mathcal{R}$ es el intervalo $[-2, 2]$, pues la horizontal por cada uno de estos elementos, y solo por estos, contiene al menos un punto de $\mathcal{R}$.

(3) $\mathcal{R}^{-1}$ se encuentra intercambiando x e y en el enunciado formal que define a $\mathcal{R}$, luego

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ 9x^2 + 4y^2 = 36\}$$

9. ¿Qué relaciones, si las hay, existen entre el dominio de definición y el de imágenes de una relación $\mathcal{R}$ y entre los mismos dominios de $\mathcal{R}^{-1}$?

Solución:

Como $\mathcal{R}^{-1}$ tiene los mismos pares que $\mathcal{R}$ excepto que los tiene en orden inverso, cada primer elemento en $\mathcal{R}$ es segundo elemento en $\mathcal{R}^{-1}$, y cada segundo elemento en $\mathcal{R}$ es primer elemento en $\mathcal{R}^{-1}$. En consecuencia, el dominio de definicion de $\mathcal{R}$ es el dominio de imágenes de $\mathcal{R}^{-1}$ y el dominio de imagenes de $\mathcal{R}$ es el dominio de definición de $\mathcal{R}^{-1}$.

10. Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ definida por el enunciado formal «$2x + y = 10$», es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in N,\ y \in N,\ 2x + y = 10\}$$

Dar (1) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (2) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (3) $\mathcal{R}^{-1}$.

Solución:

Observar primero que el conjunto de solución de $2x + y = 10$ es

$$\mathcal{R} = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$$

no obstante haber infinitos elementos en N.

(1) El dominio de definición de $\mathcal{R}$, que consiste en los primeros elementos de $\mathcal{R}$, es $\{1, 2, 3, 4\}$.

(2) El dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, que consiste en los segundos elementos de $\mathcal{R}$, es $\{8, 6, 4, 2\}$.

(3) $\mathcal{R}^{-1}$ se obtiene intercambiando x e y en el enunciado formal que define a $\mathcal{R}$, por tanto,

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \mid x \in N,\ y \in N,\ x + 2y = 10\}$$

Si, pues como $\mathcal{R}^{-1}$ contiene los mismos pares que $\mathcal{R}$ pero en orden inverso, $\mathcal{R}^{-1}$ se puede definir por

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$$

RELACIONES REFLEXIVAS

11. ¿Cuándo una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es *no* reflexiva?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no reflexiva si hay al menos un elemento $a \in A$ tal que $(a, a) \notin \mathcal{R}$.

12. Sean $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$. ¿Es reflexiva $\mathcal{R}$?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no reflexiva porque $3 \in W$ y $(3, 3) \notin \mathcal{R}$.

13. Sea A un conjunto cualquiera y sea D la «diagonal» de $A \times A$, es decir, D es el conjunto de todos los (a, a) con $a \in A$. ¿Qué relación hay entre todas las relaciones reflexivas $\mathcal{R}$ en A y D?

Solución:

Toda relación reflexiva $\mathcal{R}$ en A debe contener la «diagonal», es decir que D es un subconjunto de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ es reflexiva.

14. Los siguientes enunciados formales definen cada uno una relación $\mathcal{R}$ en los números naturales N. Decir en cada caso si la relación es o no reflexiva.

(1) «x es menor o igual que y». (3) «$x + y = 10$».
(2) «x divide a y». (4) «x e y son primos relativos».

Solución:

(1) Como $a \leqq a$ para todo $a \in N$, $(a, a) \in \mathcal{R}$. Así que $\mathcal{R}$ es reflexiva.
(2) Puesto que todo número se divide a sí mismo, la relación es reflexiva.
(3) Siendo $3 + 3 \neq 10$, 3 no está relacionado consigo mismo y, por tanto, $\mathcal{R}$ no es reflexiva.
(4) El máximo común divisor de 5 y 5 es 5; así, pues, $(5, 5) \notin \mathcal{R}$, con lo que $\mathcal{R}$ no es reflexiva.

15. Sea $E = \{1, 2, 3\}$. Examínense las siguientes relaciones en E:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\} \qquad \mathcal{R}_4 = \{(1, 2)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \qquad \mathcal{R}_5 = E \times E$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Decir de cada una de estas relaciones si es o no reflexiva.

Solución:

Si una relación en E es reflexiva, entonces $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 3)$ deben pertenecer a la relación. Así, pues, únicamente $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_5$ son reflexivas.

RELACIONES SIMETRICAS

16. ¿Cuándo una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es *no* simétrica?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no simétrica si hay elementos $a \in A$, $b \in A$ tales que

$$(a, b) \in \mathcal{R}, \quad (b, a) \notin \mathcal{R}$$

Nótese que $a \neq b$, sino $(a, b) \in \mathcal{R}$ implica $(b, a) \in \mathcal{R}$.

17. Dados $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (2, 1), (3, 3)\}$, ¿es $\mathcal{R}$ simétrica?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no simétrica, puesto que $3 \in V$, $4 \in V$, $(3, 4) \in \mathcal{R}$ y $(4, 3) \notin \mathcal{R}$.

18. ¿Hay algún conjunto A en que toda relación en A sea simétrica?

Solución:

Si A es el conjunto vacío o si A solamente tiene un elemento, entonces toda relación en A es simétrica.

19. Cada uno de los enunciados formales siguientes define una relación $\mathcal{R}$ en los números naturales N. Decir de cada una si es o no una relación simétrica.

(1) «x es menor o igual que y». (3) «$x + y = 10$».
(2) «x divide a y». (4) «$x + 2y = 10$»

Solución:

(1) Como $3 \leq 5$ pero $5 \nleq 3$, $(3, 5) \in \mathcal{R}$ y $(5, 3) \notin \mathcal{R}$. Así que $\mathcal{R}$ no es simétrica.
(2) Como 2 divide a 4 pero no divide a 2, $(2, 4) \in \mathcal{R}$ y $(4, 2) \notin \mathcal{R}$. Y así, pues, $\mathcal{R}$ es no simétrica.

(3) Si $a + b = 10$, $b + a = 10$, es decir, que si $(a, b) \in \mathcal{R}$ aquí se sigue que $(b, a) \in \mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ es, pues, simétrica.
(4) Se ve que $(2, 4) \in \mathcal{R}$ pero que $(4, 2) \notin \mathcal{R}$, es decir, que $2 + 2(4) = 10$ pero $4 + 2(2) \neq 10$. $\mathcal{R}$ es no simétrica.

20. Dado $E = \{1, 2, 3\}$, sean las siguientes relaciones en E:

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$
$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1)\}$
$\mathcal{R}_3 = \{(1, 2)\}$
$\mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}$
$\mathcal{R}_5 = E \times E$

Establecer si estas relaciones son o no simétricas.

Solución:

(1) $\mathcal{R}_1$ es no simétrica puesto que $(2, 1) \in \mathcal{R}_1$ pero $(1, 2) \notin \mathcal{R}_1$.
(2) $\mathcal{R}_2$ es simétrica.
(3) $\mathcal{R}_3$ no es simétrica ya que $(1, 2) \in \mathcal{R}_3$ pero $(2, 1) \notin \mathcal{R}_3$.
(4) $\mathcal{R}_4$ es simétrica.
(5) $\mathcal{R}_5$ es simétrica.

21. Demostrar: Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ relaciones simétricas en un conjunto A; entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es una relación simétrica en A.

Solución:

Siendo $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ subconjuntos de $A \times A$, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ también es un subconjunto de $A \times A$ y, por consiguiente, es una relación en A.

Sea $(a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$. Entonces $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(a, b) \in \mathcal{R}'$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son simétricas, (b, a) pertenece también a $\mathcal{R}$ y (b, a) pertenece también a $\mathcal{R}'$; luego $(b, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.

Queda demostrado que $(a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ implica $(b, a) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ y que, por tanto, $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es simétrica.

RELACIONES ANTISIMETRICAS

22. ¿Cuándo una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es no antisimétrica?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no antisimétrica si hay elementos $a \in A$, $b \in A$, $a \neq b$, tales que $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$.

23. Sea $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}$. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no antisimétrica, porque $1 \in W$, $2 \in W$, $1 \neq 2$, $(1, 2) \in \mathcal{R}$ y $(2, 1) \in \mathcal{R}$.

24. ¿Puede una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A ser simétrica y antisimétrica?

Solución:

Cualquier subconjunto de la «diagonal» de $A \times A$, esto es, cualquier relación $\mathcal{R}$ en A en la que

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ implique } a = b$$

es tanto simétrica como antisimétrica.

25. Sea $E = \{1, 2, 3\}$. Considérense las siguientes relaciones en E:

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$
$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1)\}$
$\mathcal{R}_3 = \{(1, 2)\}$
$\mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
$\mathcal{R}_5 = E \times E$

Decir de cada relación si es o no antisimétrica.

Solución:

(1) $\mathcal{R}_1$ no es antisimétrica, pues $(3, 2) \in \mathcal{R}_1$ y $(2, 3) \in \mathcal{R}_1$.
(2) $\mathcal{R}_2$ es antisimétrica.
(3) $\mathcal{R}_3$ es antisimétrica.
(4) $\mathcal{R}_4$ no es antisimétrica, porque $(2, 3) \in \mathcal{R}_4$ y $(3, 2) \in \mathcal{R}_4$.
(5) $\mathcal{R}_5$ no es antisimétrica, por la misma razón que en $\mathcal{R}_4$.

26. Sea $E = \{1, 2, 3\}$. Dar un ejemplo de una relación $\mathcal{R}$ en E que no sea simétrica ni antisimétrica.

Solución:

La relación $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ no es simétrica porque $(2, 3) \in \mathcal{R}$ pero $(3, 2) \notin \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ tampoco es antisimetrica porque $(1, 2) \in \mathcal{R}$ y $(2, 1) \in \mathcal{R}$.

27. Cada uno de los siguientes enunciados formales define una relación $\mathcal{R}$ en los números naturales N. Decir de cada relación si es o no antisimétrica.

(1) «x es menor o igual que y» (3) «$x + 2y = 10$»
(2) «x es menor que y» (4) «x divide a y»

Solución:

(1) Como $a \leq b$ y $b \leq a$ implican $a = b$, $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

(2) Si $a \neq b$, entonces bien $a < b$ o bien $b < a$; asi que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

(3) El conjunto de solucion es $\mathcal{R}^* = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\}$ Obsérvese que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}$ $\emptyset$, que es un subconjunto de la «diagonal» de $N \times N$. Asi que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

(4) Como a divide a b y b divide a a implican $a = b$, $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

RELACIONES TRANSITIVAS

28. ¿Cuándo una relación en un conjunto A es *no* transitiva?

Solución:

$\mathcal{R}$ es no transitiva si hay elementos a, b y c de A no necesariamente distintos, tales que

$$(a, b) \in \mathcal{R}, \ (b, c) \in \mathcal{R} \quad \text{pero} \quad (a, c) \notin \mathcal{R}$$

29. Sean $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ ¿Es $\mathcal{R}$ transitiva?

Solución:

$\mathcal{R}$ no es transitiva, pues $(4, 3) \in \mathcal{R}$, $(3, 1) \in \mathcal{R}$ pero $(4, 1) \notin \mathcal{R}$

30. Sean $W = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 2)\}$. ¿Es $\mathcal{R}$ transitiva?

Solución:

$\mathcal{R}$ no es transitiva, puesto que $(3, 2) \in \mathcal{R}$, $(2, 3) \in \mathcal{R}$ pero $(3, 3) \notin \mathcal{R}$.

31. Cada uno de los enunciados formales que siguen define una relación $\mathcal{R}$ en los números naturales N. Decir de cada relación si es transitiva o no.

(1) «x es menor o igual a y» (3) «$x + y = 10$»
(2) «x divide y» (4) «$x + 2y = 5$»

Solucion

(1) Como $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$, la relacion es transitiva.

(2) Si x divide a y e y divide a z, entonces x divide a z, esto es,

$$(x, y) \in \mathcal{R}, \ (y, z) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (x, z) \in \mathcal{R}$$

Asi que $\mathcal{R}$ es transitiva

(3) Observese que $2 + 8 = 10$, $8 + 2 = 10$ y $2 + 2 \neq 10$; es decir,

$$(2, 8) \in \mathcal{R}, \ (8, 2) \in \mathcal{R} \quad \text{pero} \quad (2, 2) \notin \mathcal{R}$$

Asi que $\mathcal{R}$ no es transitiva

(4) $\mathcal{R}$ no es transitiva, puesto que $(3, 1) \in \mathcal{R}$, $(1, 2) \in \mathcal{R}$ pero $(3, 2) \notin \mathcal{R}$; esto es,

$$3 + 2(1) = 5, \ 1 + 2(2) = 5 \quad \text{pero} \quad 3 + 2(2) \neq 5$$

32. Demostrar: Si una relación $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces su relación recíproca $\mathcal{R}^{-1}$ también lo es.

[redacted]

Sean (a, b) y (b, c) elementos de $\mathcal{R}^{-1}$; entonces $(c, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es transitiva, (c, a) también pertenece a $\mathcal{R}$; luego $(a, c) \in \mathcal{R}^{-1}$.

Queda demostrado que $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$, $(b, c) \in \mathcal{R}^{-1}$ implican $(a, c) \in \mathcal{R}^{-1}$; luego $\mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.

33. Dado $E = \{1, 2, 3\}$, sean las siguientes relaciones en E:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (2, 2)\} \qquad \mathcal{R}_4 = \{(1, 1)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\} \qquad \mathcal{R}_5 = E \times E$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 2)\}$$

Establecer en cada relación si es o no transitiva.

Solución:

Todas las relaciones son transitivas menos la $\mathcal{R}_2$, que no lo es porque

$$(2, 1) \in \mathcal{R}_2, \ (1, 2) \in \mathcal{R}_2 \quad \text{pero} \quad (2, 2) \notin \mathcal{R}_2$$

RELACIONES Y FUNCIONES

34. Dado $W = \{1, 2, 3, 4\}$, sean las relaciones siguientes en W:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \qquad \mathcal{R}_4 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 1)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\} \qquad \mathcal{R}_5 = \{(2, 1), (4, 4), (3, 1), (2, 3)\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

Decir de cada una de estas relaciones si es o no una función de W en W.

Solución:

Primero tener en cuenta que una relación $\mathcal{R}$ en W es una función de W en W si, y solamente si, todo $a \in W$ aparece como primer elemento en un par ordenado de $\mathcal{R}$, y solo en uno.

(1) $\mathcal{R}_1$ es una función.

(2) $\mathcal{R}_2$ no es una función porque $1 \in W$ y 1 aparece como primer elemento en $(1, 1) \in \mathcal{R}_2$ y en $(1, 2) \in \mathcal{R}_2$

(3) $\mathcal{R}_3$ es una función

(4) $\mathcal{R}_4$ no es una función porque $2 \in W$, pero 2 no aparece de primer elemento en ningún par ordenado de $\mathcal{R}_4$

(5) $\mathcal{R}_5$ no es una función porque los dos pares ordenados diferentes $(2, 1)$ y $(2, 3)$, que pertenecen a $\mathcal{R}_5$, tienen el mismo primer elemento

35. Sean la relación $\mathcal{R}$ entre A y B representada en el diagrama de coordenadas de $A \times B$. ¿Cómo se podría determinar geométricamente si $\mathcal{R}$ es o no es una función de A en B?

Solución:

Si toda vertical contiene solamente un punto de $\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}$ es una función de A en B

36. Sean $A = [-4, 4]$, $B = [0, 4]$, $C = [-2, 0]$ y $D = [-4, 0]$ y el enunciado formal $P(x, y)$ que dice «$x^2 + y^2 = 16$». De la consideración de las siguientes relaciones

(1) $\mathcal{R}_1 = (A, B, P(x, y))$ (4) $\mathcal{R}_4 = (A, C, P(x, y))$

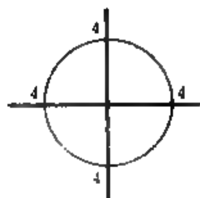
(2) $\mathcal{R}_2 = (B, A, P(x, y))$ (5) $\mathcal{R}_5 = (A, D, P(x, y))$

(3) $\mathcal{R}_3 = (B, B, P(x, y))$

concluir cuáles son funciones y cuáles no lo son.

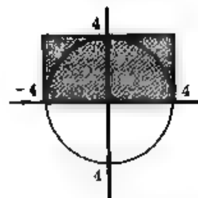
Solución:

Nótese primero que la relación $\mathcal{R}$ en los números reales definida por $x^2 + y^2 = 16$ comprende los puntos de un círculo de radio 4 con centro en el origen, como se ve en la Figura 6-6.



Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-6



$A \times B$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

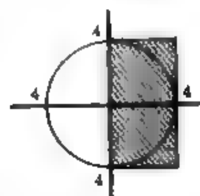
Fig. 6-7

(1) Representar $A \times B$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$ indicando $\mathcal{R}$ por sombreado del área apropiada como se ve en la Figura 6-7.

La intersección del círculo $\mathcal{R}$ con $A \times B$ es $\mathcal{R}_1$. Nótese que cada vertical por A contiene precisamente un punto de $\mathcal{R}_1$, lo que hace que $\mathcal{R}_1$ sea una función.

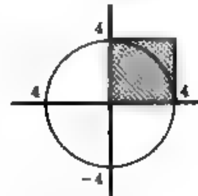
(2) Representar $B \times A$ y $\mathcal{R}$ en un diagrama cartesiano como se ve en la Figura 6-8.

$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap (B \times A)$. Se ve que hay verticales por elementos de B que contienen dos puntos de $\mathcal{R}_2$, luego $\mathcal{R}_2$ no es una función.



$B \times A$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-8



$B \times B$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

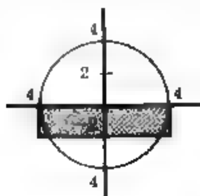
Fig. 6-9

(3) Representar $B \times B$ y $\mathcal{R}$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$ como se ve en la Figura 6-9.

Cada vertical por cada elemento de B contiene precisamente un punto de $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R} \cap (B \times B)$, así que $\mathcal{R}_3$ es una función.

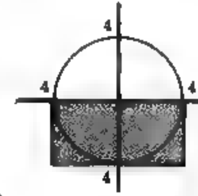
(4) Representar $A \times C$ y $\mathcal{R}$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$ como en la Figura 6-10.

La vertical por $0 \in A$ no contiene ningún punto de $\mathcal{R}_4$. $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R} \cap (A \times C)$, luego $\mathcal{R}_4$ no es una función.



$A \times C$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-10



$A \times D$ en sombreado
Representación de $\mathcal{R}$

Fig. 6-11

(5) Representar $A \times D$ y $\mathcal{R}$ en un diagrama de coordenadas de $R \times R$ como en la Figura 6-11.

Notar que cada vertical por cualquier elemento de A contiene precisamente un punto de $\mathcal{R}_5 = \mathcal{R} \cap (A \times D)$ y, por tanto, $\mathcal{R}_5$ es una función de A en D.

PROBLEMAS DIVERSOS

37. Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales N definida por el enunciado formal «$(x - y)$ es divisible por 5», es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in N,\ y \in N,\ (x - y) \text{ es divisible por } 5\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución:

Sea $a \in N$, entonces $(a - a) = 0$ es divisible por 5 y, por tanto, $(a, a) \in \mathcal{R}$, con lo que $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Sea $(a, b) \in \mathcal{R}$; entonces $(a - b)$ es divisible por 5 y, por tanto, $(b - a) = -(a - b)$ también es divisible por 5. Por lo que (b, a) pertenece a $\mathcal{R}$. Como

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (b, a) \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ es simétrica.

Sean $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$; entonces $(a - b)$ y $(b - c)$ son divisibles por 5. Por tanto, $(a - c) = (a - b) + (b - c)$ es también divisible por 5, esto es, (a, c) pertenece a $\mathcal{R}$. Como

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, c) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (a, c) \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ es transitiva.

Siendo $\mathcal{R}$ reflexiva, simétrica y transitiva, $\mathcal{R}$ es, por definición, una relación de equivalencia

38. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ relaciones en un conjunto A. Demostrar las siguientes proposiciones

(1) Si $\mathcal{R}$ es simétrica y si $\mathcal{R}'$ es simétrica, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es simétrica.
(2) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y $\mathcal{R}'$ es una relación cualquiera, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es reflexiva.

Solución:

(1) Si $(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$, entonces (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$ o a $\mathcal{R}'$, que son simétricas. Luego (b, a) pertenece también a $\mathcal{R}$ o a $\mathcal{R}'$, o sea que $(b, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ y $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es simétrica.

(2) $\mathcal{R}$ es reflexiva si, y solo si, $\mathcal{R}$ contiene la «diagonal» D de $A \times A$. Pero $D \subset \mathcal{R}$ y $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ implican $D \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$. Por consiguiente, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es reflexiva.

39. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ relaciones en un conjunto A. Demostrar la falsedad de los siguientes razonamientos valiéndose de un contraejemplo, es decir, de un ejemplo en que el razonamiento no es verdadero.

(1) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica y $\mathcal{R}'$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es antisimétrica.
(2) Si $\mathcal{R}$ es transitiva y $\mathcal{R}'$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es transitiva.

Solución:

(1) $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(2, 1)\}$ son ambas antisimétricas; pero $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = \{(1, 2), (2, 1)\}$ no es antisimétrica.

(2) $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(2, 3)\}$ son cada una transitivas, pero $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = \{(1, 2), (2, 3)\}$ no es transitiva.

40. Sean

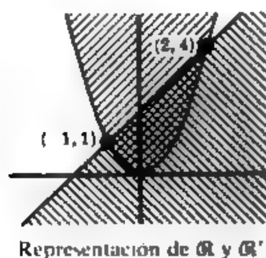
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ y \geq x^2\}$$
$$\mathcal{R}' = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ y \leq x + 2\}$$

Notar que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son ambas relaciones en los números reales.

(1) Representar la relación $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$.
(2) Averiguar el dominio de definición de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.
(3) Averiguar el dominio de imágenes de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.

Solución:

(1) Representar $\mathcal{R}$ en un diagrama de $R \times R$ como en el Problema 4 rayando $\mathcal{R}$ con trazos inclinados a la derecha (/ / /); y en el mismo diagrama representar $\mathcal{R}'$ con trazos inclinados a la izquierda (\\\\\\), como se ve en la Fig. 6-12. El área con doble rayado es $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$. Así aparece $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ representado en la Figura 6-13.



Representación de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$
Fig. 6-12

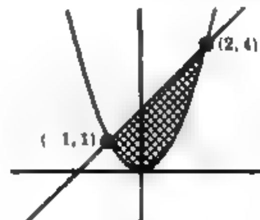


Fig. 6-13

(2) El dominio de definición de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es $[-1, 2]$, pues toda vertical por cada punto de este intervalo, y solo por esos puntos, contiene un punto de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.

(3) El dominio de imágenes de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es $[0, 4]$, porque toda horizontal por cada punto de este intervalo, y solo por esos puntos, contiene al menos un punto de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.

Problemas propuestos

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS RELACIONES

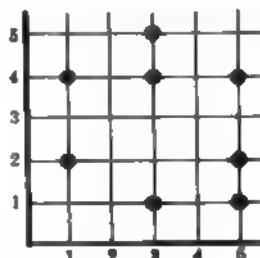
41. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $A = \{2, 3, 4, 5\}$ definida por el enunciado formal «x e y son primos relativos», esto es, «el único divisor común de x e y es 1».

(1) Averiguar el conjunto de solución de $\mathcal{R}$, o lo que es lo mismo, escribir $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados.

(2) Representar $\mathcal{R}$ en un diagrama de coordenadas de $A \times A$.

42. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por el enunciado formal «$|x - y|$ es divisible por 3». Escribir $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados

43. Dados $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación $\mathcal{R}$ en C por el conjunto de puntos representados en el siguiente diagrama de coordenadas de $C \times C$:



(1) Establecer si es verdadero o falso: (*a*) $1 \mathcal{R} 4$, (*b*) $2 \mathcal{R} 5$, (*c*) $3 \not\mathcal{R} 1$, (*d*) $5 \not\mathcal{R} 3$.

(2) Escribir los siguientes subconjuntos de C en forma tabular:

(*a*) $\{x \mid 3 \mathcal{R} x\}$ (*c*) $\{x \mid (x, 2) \notin \mathcal{R}\}$

(*b*) $\{x \mid (4, x) \in \mathcal{R}\}$ (*d*) $\{\mathcal{R} \mid x \mathcal{R} 5\}$

Hallar (3) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (4) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (5) $\mathcal{R}^{-1}$.

44. Los enunciados formales que siguen definen sendas relaciones en los números reales. Representar cada relación en un diagrama de coordenadas de $R \times R$.

(1) $y < x^2 - 4x + 2$ (3) $x < y^2$

(2) $y \geq \dfrac{x}{2} + 2$ (4) $x \geq \operatorname{sen} y$

45. Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x^2 + 4y^2 \leqq 16\}$.

(1) Representar $\mathcal{R}$ en el diagrama de $R \times R$. Hallar (2) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (3) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$.

46. Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x^2 - y^2 \geqq 4\}$.

(1) Representar $\mathcal{R}$ en el diagrama cartesiano de $R \times R$. Hallar (2) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (3) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$. (4) Definir $\mathcal{R}^{-1}$.

47. Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales N definida por el enunciado formal «$x + 3y = 12$». Dicho de otra manera, sea

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 3y = 12\}$$

(1) Escribir $\mathcal{R}$ como un conjunto de pares ordenados. Hallar (2) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (3) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (4) $\mathcal{R}^{-1}$.

48. Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales N definida por $2x + 4y = 15$.
(1) Escribir $\mathcal{R}$ como conjunto de pares ordenados. Hallar (2) el dominio de definición de $\mathcal{R}$, (3) el dominio de imágenes de $\mathcal{R}$, (4) $\mathcal{R}^{-1}$

RELACIONES REFLEXIVAS, SIMETRICAS, ANTISIMETRICAS Y TRANSITIVAS

49. Dado $W = \{1, 2, 3, 4\}$ considérense las siguientes relaciones en W

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2)\} \qquad \mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 3), (4, 1)\} \qquad \mathcal{R}_5 = W \times W$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

Establecer para cada una si es o no: (1) simétrica, (2) antisimétrica, (3) transitiva, (4) reflexiva

50. Establecer la verdad o falsedad de los razonamientos que siguen, suponiendo que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son relaciones en un conjunto A

(1) Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es simétrica.
(2) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es antisimétrica
(3) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \varnothing$.
(4) Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \varnothing$
(5) Si $\mathcal{R}$ es transitiva y $\mathcal{R}'$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es transitiva
(6) Si $\mathcal{R}$ es transitiva y $\mathcal{R}'$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es transitiva
(7) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica y $\mathcal{R}'$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es antisimétrica
(8) Si $\mathcal{R}$ es antisimétrica y $\mathcal{R}'$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es antisimétrica
(9) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y $\mathcal{R}'$ es reflexiva, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ es reflexiva.
(10) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva y $\mathcal{R}'$ es reflexiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ es reflexiva.

51. Sea L el conjunto de rectas del plano euclidiano y sea la relación $\mathcal{R}$ definida en L por «x es paralela a y» Decir si $\mathcal{R}$ es o no (1) reflexiva, (2) simétrica, (3) antisimétrica, (4) transitiva. (Se acepta que una recta es paralela a si misma.)

52. Dado L, el conjunto de rectas del plano euclidiano, sea $\mathcal{R}$ la relación en L definida por «x es perpendicular a y» Decir si $\mathcal{R}$ es o no (1) reflexiva, (2) simétrica, (3) antisimétrica, (4) transitiva.

53. Dada una familia $\mathscr{A}$ de conjuntos, sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathscr{A}$ por «x es disjunto de y» Decir si $\mathcal{R}$ es o no (1) reflexiva, (2) simetrica, (3) antisimétrica, (4) transitiva

54. ¿Qué clase de relación es $\mathcal{R}$ si (1) $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \varnothing$, (2) $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$?

55. Cada enunciado formal de los que siguen define una relación en los números naturales N

(1) «x es mayor que y». (3) «x por y es el cuadrado de un numero»
(2) «x es múltiplo de y». (4) «$x + 3y = 12$»

Decir de cada relación si es o no (a) reflexiva, (b) simétrica, (c) antisimetrica, (d) transitiva

RELACIONES Y FUNCIONES

56. Dado $T = \{a, b, c, d\}$, considerar las siguientes relaciones en T

(1) $\mathcal{R}_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ (4) $\mathcal{R}_4 = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, d)\}$
(2) $\mathcal{R}_2 = \{(b, a), (c, d), (b, a), (a, b), (d, b)\}$ (5) $\mathcal{R}_5 = \{(b, a), (a, c), (d, d)\}$
(3) $\mathcal{R}_3 = \{(d, c), (c, b), (a, b), (d, d)\}$

Establecer si cada relación es o no una función.

57. Sea $A = [-4, 4]$, $B = [0, 4]$, $C = [-4, 0]$, y sea el enunciado formal $P(x, y)$ que quiere decir «$x^2 + 4y^2 = 16$» Considerar las relaciones siguientes

(1) $\mathcal{R}_1 = (A, B, P(x, y))$ (3) $\mathcal{R}_3 = (B, A, P(x, y))$
(2) $\mathcal{R}_2 = (A, C, P(x, y))$ (4) $\mathcal{R}_4 = (B, C, P(x, y))$

Representar cada relacion en un plano cartesiano como en el Problema 36, y establecer si la relacion es o no una función

58. Dados $A = [0, \infty[$, $B =]-\infty, 0]$, $C = [2, \infty[$, $D =]-\infty, -2]$ y el enunciado formal $P(x, y)$ que significa «$x^2 - y^2 = 4$», considerar la relación

$$\mathcal{R} = (X, Y, P(x, y))$$

donde X e Y son conjuntos desconocidos. Si X e Y pueden ser cualesquiera de los cuatro conjuntos anteriores, ¿cuáles de las dieciséis relaciones son funciones? (*Sugerencia*: primero representar $P(x, y)$ en un plano cartesiano.)

59. Sea A cualquier conjunto.
(1) ¿Hay mas de una relación reflexiva en A que sea una función?
(2) ¿Hay alguna relación reflexiva en A que sea una función?

60. Demostrar: Si A no es vacío y $\mathcal{R}$ es una relación transitiva en A que no contiene ningún «elemento de la diagonal» $(x, x) \in A \times A$, entonces $\mathcal{R}$ no es una función en A.

PROBLEMAS DIVERSOS

61. *Considerense las siguientes relaciones en los números reales:*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ x^2 + y^2 \leqq 25\}$$
$$\mathcal{R}' = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ y \geqq 4x^2/9\}$$

(1) Representar la relación $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ en un diagrama de coordenadas de $R \times R$.
(2) Averiguar el dominio de definición de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$. (3) Hallar el dominio de imágenes de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$.

62. Considérense los siguientes conjuntos de pares de numeros reales, o sea relaciones en R:

(1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\} \cap \{(x, y) \mid y \geq 3x/4\}$
(2) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 25\} \cap \{(x, y) \mid y \geq 4x^2/9\}$
(3) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\} \cup \{(x, y) \mid y \geq 4x^2/9\}$
(4) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\} \cap \{(x, y) \mid y < 3x/4\}$

Representar cada relación en un diagrama de coordenadas de $R \times R$ y establecer el dominio de definición y el dominio de imágenes.

63. *Sea A el conjunto de las personas. Cada enunciado formal siguiente define una relación $\mathcal{R}$. Para cada una de estas* relaciones, hallar un enunciado formal, el llamado a veces «enunciado recíproco», que defina la relación recíproca.

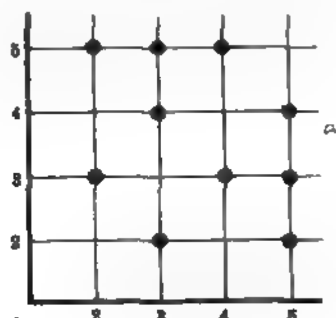
(1) «x es el marido de y»
(2) «x es mayor que y»
(3) «x es más alto que y»
(4) «x es más rico que y»
(5) «x es más inteligente que y»

64. Sean N los numeros naturales. Cada enunciado formal de los que siguen define una relación en N. Para cada una de tales relaciones, encontrar un enunciado formal que defina la relacion recíproca.

(1) «x es mayor que y»
(2) «x es mayor o igual que y»
(3) «x es múltiplo de y»
(4) «$2x + 3y = 30$»

Respuestas a los problemas propuestos

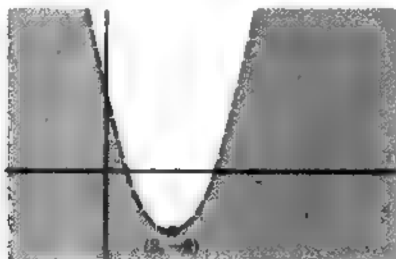
41. (1) $\mathcal{R} = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$
(2)



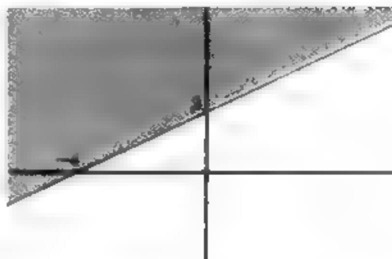
42. $\mathcal{R} = \{(2,2), (2,5), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (5,2), (6,6), (6,3)\}$

43. (1) (*a*) Cierto. (*b*) Falso. (*c*) Falso. (*d*) Cierto.
(2) (*a*) $\{1,4,5\}$, (*b*) $\emptyset$, (*c*) $\{2,3,4\}$, (*d*) $\{3\}$
(3) $\{1,3,5\}$ (4) $\{1,2,4,5\}$
(5) $\mathcal{R}^{-1} = \{(1,3), (1,5), (2,1), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (5,3)\}$

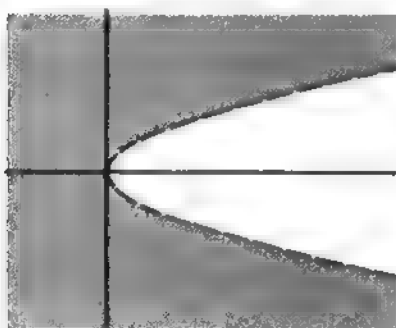
44. (1)



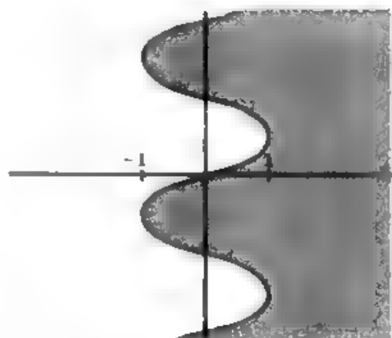
(2)



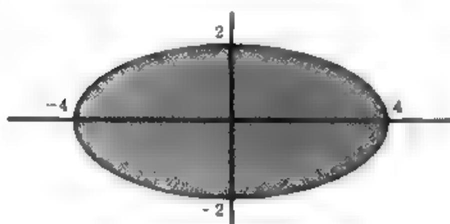
(3)



(4)

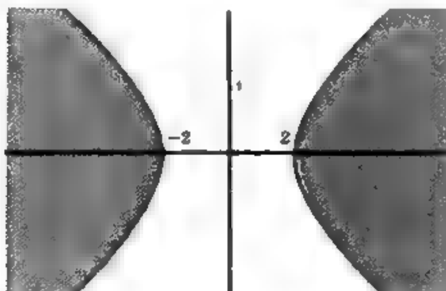


45. (1)



(2) El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es $[-4, 4]$ (3) El dominio de imágenes de $\mathcal{R}$ es $[-2, 2]$

46. (1)



(2) El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es $\{x \mid x \geq 2 \text{ o } x \leq -2\}$.
(3) El dominio de definición de $\mathcal{R}$ es R.
(4) $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) \mid x \in R,\ y \in R,\ x^2 - y^2 \leq -4\}$.

47. (1) $\mathcal{R} = \{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$
(2) $\{9, 6, 3\}$
(3) $\{1, 2, 3\}$
(4) $\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$

48. (1) $\varnothing$, (2) $\varnothing$, (3) $\varnothing$, (4) $\varnothing$.

49. (1) $\mathcal{R}_4$ y $\mathcal{R}_5$ son simétricas.
(2) Solo $\mathcal{R}_5$ no es antisimétrica.
(3) Todas las relaciones son transitivas.
(4) Solo $\mathcal{R}_5$ es reflexiva.

50. (1) Cierta (2) Cierta (3) Cierta (4) Falsa (5) Falsa (6) Cierta (7) Falsa (8) Cierta (9) Cierta (10) Cierta

51. $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, esto es, una relación equivalente. $\mathcal{R}$ no es antisimétrica

52. $\mathcal{R}$ es solo simétrica

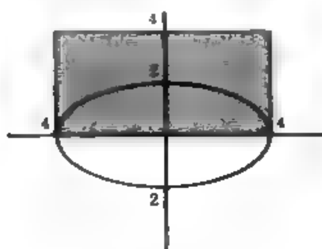
53. $\mathcal{R}$ es solo simétrica

54. (1) antisimétrica, (2) simétrica

55. (1) antisimétrica y transitiva.
(2) reflexiva, antisimétrica y transitiva
(3) reflexiva, simétrica y transitiva, esto es, una relación equivalente.
(4) antisimétrica y transitiva.

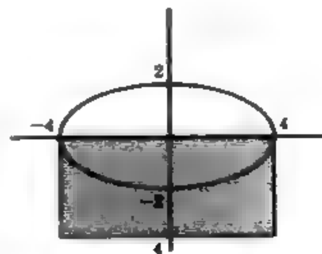
56. (1) Sí, (2) Sí, (3) No, (4) Sí, (5) No

57. (1)



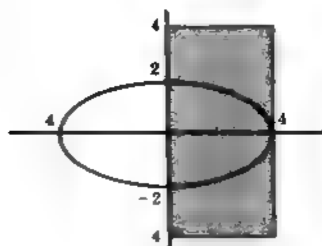
$\mathcal{R}_1$ es una función

(2)



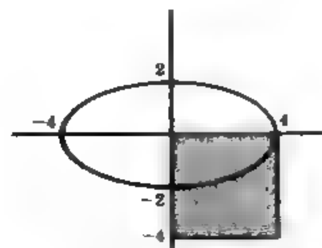
$\mathcal{R}_2$ es una función

(3)



$\mathcal{R}_3$ no es una función

(4)



$\mathcal{R}_4$ es una función

58. Las únicas relaciones que son funciones son:

$\mathcal{R} = (C, A, P(x, y))$, $\mathcal{R} = (C, B, P(x, y))$, $\mathcal{R} = (D, A, P(x, y))$, $\mathcal{R} = (D, B, P(x, y))$

59. La única relación reflexiva en un conjunto A que es una función, es la relación que solo contiene los pares ordenados de la «diagonal» de $A \times A$; define la función idéntica sobre A. Por tanto, (1) no, (2) sí.

60. Como $A \neq \varnothing$, hay algún elemento $a \in A$. Si $\mathcal{R}$ es una función, hay entonces un par ordenado $(a, b) \in \mathcal{R}$ tal que, por hipótesis, $a \neq b$. Y, además, como $b \in A$, hay un par ordenado $(b, c) \in \mathcal{R}$ tal que $b \neq c$. Como $\mathcal{R}$ es transitiva

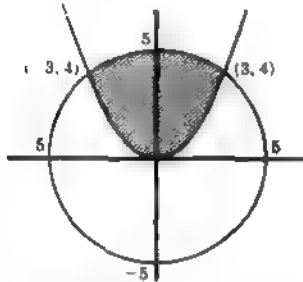
$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, c) \in \mathcal{R} \quad \text{implica} \quad (a, c) \in \mathcal{R}$$

Así

$$(a, b) \in \mathcal{R}, \ (a, c) \in \mathcal{R}, \ b \neq c$$

$\mathcal{R}$ no puede ser una función puesto que contiene dos pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento

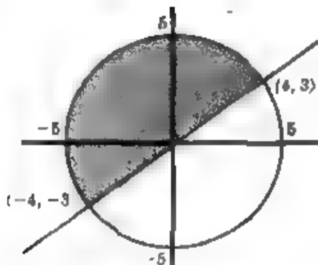
61. (1)



$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ en sombreado

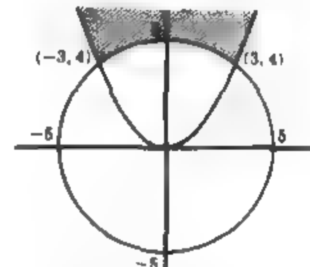
(2) [−3, 3]
(3) [0, 5]

62. (1)



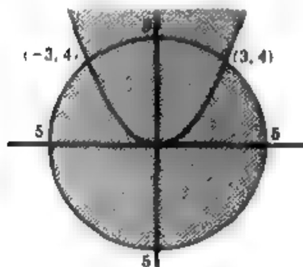
El dominio de definición es [−5, 4]
El dominio de imágenes es [−3, 5]

(2)



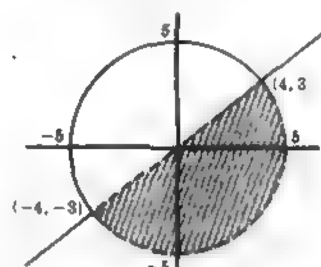
El dominio de definición es R
El dominio de imágenes es [4, ∞[

(3)



El dominio de definición es R
El dominio de imágenes es [−5, ∞[

(4)



El dominio de definición es $\{x \mid -4 < x < 5$
El dominio de imágenes es $\{y \mid -5 < y < 3$

63. (1) «x es la esposa de y»
(2) «x es menor que y»
(3) «x es más bajo que y»
(4) «x es más pobre que y»
(5) «x es menos inteligente que y»

64. (1) «x es menor que y»
(2) «x es menor o igual que y»
(3) «x divide a y» o «x es un factor de y»
(4) «$3x + 2y = 30$»

Capítulo 7

Complementos a la teoría de conjuntos

ALGEBRA DE CONJUNTOS

Las operaciones de unión, intersección y de complemento entre conjuntos cumplen varias leyes es decir, verifican ciertas identidades. En la Tabla 1 se enuncian estas leyes, la mayoría de las cuales ya se han visto y demostrado en el Capítulo 2. Hay una rama de las matemáticas en que se investiga la teoría de conjuntos estudiando aquellos teoremas que se deducen de estas leyes, es decir, aquellos teoremas cuya demostración requiere de estas leyes y sólo de ellas. Se dirá que las leyes de la Tabla 1 y sus consecuencias constituyen el álgebra de conjuntos.

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS	
Leyes de idempotencia	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Leyes asociativas	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes conmutativas	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leyes de complemento	
7a. $A \cup A' = U$	7b. $A \cap A' = \emptyset$
8a. $(A')' = A$	8b. $U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$
Leyes de De Morgan	
9a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	9b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Tabla 1

Es de notar que el concepto de «elemento» y la relación «a pertenece a A» no aparecen en ninguna parte en la Tabla 1. Aunque estos conceptos eran esenciales para el desarrollo previo de la teoría de conjuntos, no aparecen al investigar el álgebra de conjuntos. La relación «A es un subconjunto de B» se define en esta álgebra de conjuntos por

$$A \subset B \quad \text{significa} \quad A \cap B = A$$

Por vía de ejemplo se demuestran dos teoremas de esta álgebra de conjuntos, es decir, se demuestran los dos teoremas siguientes que se deducen directamente de las leyes de la Tabla 1. En la sección de problemas se dan otros teoremas y demostraciones.

Ejemplo 1-1: Demostrar $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

Proposición	Razón
1. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$	1. Ley distributiva
2. $B \cap B' = \varnothing$	2. Ley del complemento
3. $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \varnothing$	3. Sustitución
4. $A \cup \varnothing = A$	4. Ley de identidad
5. $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$	5. Sustitución

Ejemplo 1-2: Demostrar: $A \subset B$ y $B \subset C$ implica $A \subset C$

Proposición	Razón
1. $A = A \cap B$ y $B = B \cap C$	1. Definición de subconjuntos
2. $\therefore A = A \cap (B \cap C)$	2. Sustitución
3. $A = (A \cap B) \cap C$	3. Ley asociativa
4. $\therefore A = A \cap C$	4. Sustitución
5. $\therefore A \subset C$	5. Definición de subconjunto

PRINCIPIO DE DUALIDAD

Si se intercambian $\cup$ y $\cap$ como también U y $\varnothing$ en cualquier razonamiento sobre conjuntos, el nuevo enunciado resultante se llama *dual* del primero.

Ejemplo 2-1: El dual de

$$(U \cup B) \cap (A \cup \varnothing) = A$$

es

$$(\varnothing \cap B) \cup (A \cap U) = A$$

Obsérvese que la dual de cada ley de la Tabla 1 está también en la Tabla 1, hecho sumamente importante por el siguiente principio:

Principio de dualidad: Si ciertos axiomas implican sus propios duales, entonces el dual de cualquier teorema que sea consecuencia de los axiomas, es también consecuencia de los axiomas. Pues dados cualquier teorema y su demostración, el dual del teorema se puede demostrar del mismo modo empleando el dual de cada paso de la primera demostración.

Así se aplica el principio de dualidad al álgebra de conjuntos.

Ejemplo 2-2: Demostrar $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

El dual de este teorema está demostrado en el Ejemplo 1-1, por tanto, este teorema es cierto por el principio de dualidad.

CONJUNTOS INDIZADOS†

Sean los conjuntos

$$A_1 = \{1, 10\}, \quad A_2 = \{2, 4, 6, 10\}, \quad A_3 = \{3, 6, 9\}, \quad A_4 = \{4, 8\}, \quad A_5 = \{5, 6, 10\}$$

y el conjunto

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Se ve que a cada elemento $i \in I$ corresponde un conjunto A_i. Se dice entonces que I es el *conjunto de índices*, que los conjuntos $\{A_1, \ldots, A_5\}$ están *indizados* y que la i suscrita de A_i, es decir, cada $i \in I$, es un *índice*. Una familia semejante de conjuntos indizados se denota por

$$\{A_i\}_{i \in I}$$

† No hay mejor traducción para un verbo ya corriente en francés y en inglés que esta palabra, por lo demás perfectamente bien formada, clara y concisa.

Una familia indizada de conjuntos se puede considerar desde otro punto de vista, ya que a cada elemento $i \varepsilon I$ se le asigna un conjunto A_i. Se establece entonces la

Definición 7-1: Una familia indizada de conjuntos $\{A_i\}_{i \varepsilon I}$ es una función

$$f : I \to \mathscr{A}$$

en que el dominio de definicion de f es el conjunto de indices I y el dominio de imágenes de f es una familia de conjuntos.

Ejemplo 3-1: Definido $B_n = \{x \mid 0 \leq x \leq 1/n\}$, donde $n \varepsilon N$, los numeros naturales. Entonces

$$B_1 = [0, 1], \; B_2 = [0, \tfrac{1}{2}].$$

Ejemplo 3-2: Sea I el conjunto de las palabras españolas e $i \varepsilon I$. Definiendo

$$P_i = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra } i \varepsilon I\}$$

Si i es la palabra «palabra», entonces

$$P_i = \{p, a, l, b, r\}$$

Ejemplo 3-3: Definase $D_n = \{x \mid x \text{ es multiplo de } n\}$, donde $n \varepsilon N$, los numeros naturales. Entonces

$$D_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \; D_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}, \; D_3 = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

Es de notar que el conjunto de indices N es tambien D_1 y asimismo es el conjunto universal para los conjuntos indizados

Observación 7-1: Toda familia $\mathscr{B}$ de conjuntos puede ser indizada por sí misma. En especial, la función idéntica

$$i : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$$

es una familia indizada de conjuntos

$$\{A_i\}_{i \varepsilon \mathscr{B}}$$

donde $A_i \varepsilon \mathscr{B}$ e $i = A_i$. Es decir, el indice de cualquier conjunto de $\mathscr{B}$ es el conjunto mismo.

OPERACIONES GENERALIZADAS

Las operaciones de unión y de intersección, definidas para dos conjuntos, se generalizan fácilmente por inducción a un número finito de conjuntos. Así, dados los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \equiv A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \equiv A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Por la ley asociativa, la unión (intersección) de los conjuntos se puede efectuar agrupándolos de cualquier modo, así que no es preciso utilizar paréntesis en las expresiones anteriores.

Se generalizan estos conceptos de la siguiente manera. Sea la familia indizada de conjuntos

$$\{A_i\}_{i \varepsilon I}$$

y sea $J \subset I$. Entonces $\bigcup_{i \varepsilon J} A_i$

consiste en aquellos elementos que pertenecen al menos a uno de los A_i, siendo $i \varepsilon J$. Así, pues,

$$\bigcup_{i \varepsilon J} A_i = \{x \mid \text{existe un } i \varepsilon J \text{ tal que } x \varepsilon A_i\}$$

De igual manera $\bigcap_{i \varepsilon J} A_i$

consiste en aquellos elementos que pertenecen a todos los A_i, siendo $i \varepsilon J$. O lo que es lo mismo,

$$\bigcap_{i \varepsilon J} A_i = \{x \mid x \varepsilon A_i \text{ para todo } i \varepsilon J\}$$

Ejemplo 4-1: Sean $A_1 = \{1, 10\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{5, 6, 10\}$; y $J = \{2, 3, 5\}$. Entonces

$$\bigcap_{i \varepsilon J} A_i = \{6\} \quad \text{y} \quad \bigcup_{i \varepsilon J} A_i = \{2, 4, 6, 10, 3, 9, 5\}$$

Ejemplo 4-2: Sea $B_n = [0, 1/n]$ con $n \varepsilon N$, los números naturales. Entonces

$$\bigcap_{i \varepsilon N} B_i = \{0\} \quad \text{y} \quad \bigcup_{i \varepsilon N} B_i = [0, 1]$$

Ejemplo 4-3: Sea $D_n = \{x \mid x$ es múltiplo de $n\}$, donde $n \in N$ los números naturales. Entonces

$$\cap_{i \in N} D_i = \emptyset$$

Existen también leyes distributivas generalizadas para un conjunto B y una familia indizada de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$. Se tiene así:

Teorema 7-1: Dada una familia indizada de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, para cualquier conjunto B es

$$B \cap (\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (B \cap A_i)$$
$$B \cup (\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

En los libros donde se escribe $A + B$ para la unión de dos conjuntos y AB para la intersección de dos conjuntos, el Teorema 7-1 se escribe

$$B \sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} BA_i$$
$$B + \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} (B + A_i)$$

PARTICIONES

Considerando el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ y los subconjuntos suyos

$$B_1 = \{1, 3\}, \quad B_2 = \{7, 8, 10\}, \quad B_3 = \{2, 5, 6\}, \quad B_4 = \{4, 9\}$$

la familia de conjuntos $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ tiene dos propiedades importantes:

(1) A es la unión de los conjuntos de $\mathscr{B}$, o sea

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

(2) Para cualesquiera conjuntos B_i y B_j

$$\text{o bien } B_i = B_j \text{ o bien } B_i \cap B_j = \emptyset.$$

Se dice de una familia semejante de conjuntos que es una *partición* de A. Se da, pues, la

Definición 7-2: Dada una familia $\{B_i\}_{i \in I}$ no vacía de subconjuntos de A, $\{B_i\}_{i \in I}$ es una *partición* de A si

P_1: $\bigcup_{i \in I} B_i = A$

P_2: Para cualesquiera B_i, B_j, o bien $B_i = B_j$, o bien $B_i \cap B_j = \emptyset$

Y entonces cada B_i se dice una *clase de equivalencia* de A.

Ejemplo 5-1: Sean $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ y $F = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Aquí $\{E, F\}$ es, pues, una partición de N.

Ejemplo 5-2: Sean $T = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ y los $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 6, 10\}$ y $C = \{4, 8, 9\}$. En este caso $\{A, B, C\}$ no es una partición de T, pues

$$T \neq A \cup B \cup C$$

es decir, porque $7 \in T$ pero $7 \notin (A \cup B \cup C)$.

Ejemplo 5-3: Dado $T = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ y los $F = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $G = \{2, 4, 10\}$ y $H = \{3, 5, 6, 8\}$. Entonces $\{F, G, H\}$ no es una partición de T porque

$$F \cap H \neq \emptyset, \quad F \neq H$$

Ejemplo 5-4: Sean y_1, y_2, y_3 e y_4, respectivamente, las palabras «libro», «danza», «brillo», «jeque» y sea

$$A = \{l, a, i, u, j, n, z, b, o, d, q, e, r\}$$

Defínase, además,

$$P_i = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra } y_i\}$$

Aquí se tiene que $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ es una partición de A. Obsérvese que P_1 y P_3 no son disjuntos, pero no hay contradicción porque los conjuntos son iguales. (Este ejemplo es altamente instructivo; averígüense los conjuntos P_i y verifíquese si definen una partición de A.)

RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y PARTICIONES

Recuérdese la siguiente

Definición: Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de equivalencia* si:

(1) $\mathcal{R}$ es reflexiva, esto es, para todo $a \in A$, a está relacionado consigo mismo;

(2) $\mathcal{R}$ es simetrica, esto es, si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a,

(3) $\mathcal{R}$ es transitiva, esto es, si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c.

Se vinculan particiones y relaciones de equivalencia por el

Teorema 7-2: Teorema fundamental sobre relaciones de equivalencia: Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto A y para todo $a \in A$ sea

$$B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in \mathcal{R}\}$$

que es el conjunto de elementos relacionados con α. Entonces la familia de conjuntos

$$\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

es una partición de A.

Lo que quiere decir que una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A produce una particion del conjunto A al reunir todos los elementos que están relacionados entre sí, en la misma clase de equivalencia.

El conjunto B_α es la *clase de equivalencia* determinada por α y el conjunto de clases de equivalencia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se denota por

$$A/\mathcal{R}$$

que se llama el *conjunto cociente*.

El reciproco del teorema anterior es también cierto. Se tiene, pues,

Teorema 7-3: Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una partición de A y sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por el enunciado formal «x está en el mismo conjunto (de la familia $\{B_i\}_{i \in I}$) en que está y». $\mathcal{R}$ es entonces una relación de equivalencia en A.

Así, pues, hay una correspondencia biunívoca entre todas las particiones de un conjunto A y todas las relaciones de equivalencia en A.

Ejemplo 6-1: En el plano euclidiano, la semejanza de triángulos es una relación de equivalencia. Así, pues, todos los triángulos del plano se reparten en conjuntos disjuntos de modo que todos los triángulos semejantes entre sí son elementos del mismo conjunto.

Ejemplo 6-2: Sea $\mathcal{R}_5$ la relación definida en los enteros por

$$x \equiv y \pmod 5$$

lo que se lee «x es congruente con y módulo 5» y que significa «$x - y$ es divisible por 5». Aquí es $\mathcal{R}_5$ una relación de equivalencia. Hay cinco clases de equivalencia en $Z/\mathcal{R}_5$ E_0, E_1, E_2, E_3 y E_4. Como todo entero x se puede expresar de una sola manera en la forma $x = 5q + r$, donde $0 \leq r < 5$, entonces x es un elemento de la clase de equivalencia E_r, donde r es el resto. Así

$$\begin{aligned}
E_0 &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\} \\
E_1 &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} \\
E_2 &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} \\
E_3 &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} \\
E_4 &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}
\end{aligned}$$

y el conjunto cociente es $Z/\mathcal{R}_5 = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

Problemas resueltos

ALGEBRA DE CONJUNTOS Y DUALIDAD

1. Escribir el dual en cada uno de los casos siguientes:

(1) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ (2) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$ (3) $(A \cap U) \cap (\varnothing \cup A') = \varnothing$

Solución:

En cada proposición intercambiar $\cup$ y $\cap$, y $\varnothing$ y U: así que

(1) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ (2) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$ (3) $(A \cup \varnothing) \cup (U \cap A') = U$

2. Demostrar la ley distributiva a la derecha: $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

Solución:

Proposición	Razón
1. $(B \cup C) \cap A = A \cap (B \cap C)$	1. Ley conmutativa
2. $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	2. Ley distributiva
3. $= (B \cap A) \cup (C \cap A)$	3. Ley conmutativa

3. Demostrar: $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.

Solución:

Metodo 1 El dual de este teorema se demostró en el Problema 2 Por tanto, el teorema es verdadero por el principio de dualidad

Metodo 2

Proposición	Razón
1. $(B \cap C) \cup A = A \cup (B \cap C)$	1. Ley conmutativa
2. $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	2. Ley distributiva
3. $= (B \cup A) \cap (C \cup A)$	3. Ley conmutativa

4. Demostrar: $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Solución:

Metodo 1 Por el principio de dualidad el teorema es cierto, puesto que su dual se demostró en el Ejemplo 1-1.

Método 2.

Proposición	Razón
1. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$	1. Ley distributiva
2. $B \cup B' = U$	2. Ley del complemento
3. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap U$	3. Sustitución
4. $A \cap U = A$	4. Ley de identidad
5. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$	5. Sustitución

5. Demostrar: Si $A \cup B = U$, entonces $A' \subset B$.

Solución:

Proposición	Razón
1. $U \cap A' = A$	1. Ley de identidad
2. $A \cup B = U$	2. Hipótesis
3. $(A \cup B) \cap A' = A'$	3. Sustitución
4. $(A \cap A') \cup (B \cap A') = A'$	4. Ley distributiva a la derecha
5. $\varnothing \cup (B \cap A') = A'$	5. Ley del complemento
6 $A' \cap B = A'$	6. Ley de identidad
7. $A' \subset B$	7. Definición de subconjunto

CONJUNTOS INDIZADOS Y OPERACIONES GENERALIZADAS

6. Sea $A_n = \{x \mid x$ es múltiplo de $n\}$, donde $n \in N$, los números naturales. Averiguar: (1) $A_3 \cap A_5$, (2) $A_4 \cap A_6$, (3) $\bigcup_{i \in P} A_i$, siendo P el conjunto de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, ...

Solución:

(1) *Los numeros divisibles por 3 y por 5 son multiplos de 15: entonces*

$$A_3 \cap A_5 = A_{15}$$

(2) Los múltiplos de 12, y solo estos números, estan en ambos conjuntos A_4 y A_6, así que

$$A_4 \cap A_6 = A_{12}$$

(3) Todo número natural, excepto 1, es multiplo de un número primo por lo menos, así, pues,

$$\bigcup_{i \in P} A_i = \{2, 3, 4, \ldots\} = N - \{1\}$$

7. Sea $B_i = [i, i+1]$, donde $i \in Z$, los números enteros. Averiguar (1) $B_1 \cup B_2$, (2) $B_3 \cap B_4$, (3) $\bigcup_{i=7}^{18} B_i$, (4) $\bigcup_{i \in Z} B_i$.

Solución:

(1) $B_1 \cup B_2$ contiene todos los puntos de los intervalos $[1, 2]$ y $[2, 3]$; con que

$$B_1 \cup B_2 = [1, 3]$$

(2) $B_3 \cap B_4$ contiene los puntos que están en los dos $[3, 4]$ y $[4, 5]$, así que

$$B_3 \cap B_4 = \{4\}$$

(3) $\bigcup_{i=7}^{18} B_i$ es la unión de los conjuntos $[7, 8], [8, 9], \ldots, [18, 19]$, se tiene, por tanto,

$$\bigcup_{i=7}^{18} B_i = [7, 19]$$

(4) *Como todo número real pertenece por lo menos a uno de los intervalos* $[i, i+1]$, entonces $\bigcup_{i \in Z} B_i = R$.

8. Dado $D_n =]0, 1/n[$, donde $n \in N$, los números naturales. Hallar:

(1) $D_3 \cup D_7$	(3) $D_s \cup D_t$	(5) $\bigcup_{i \in A} D_i$, donde A es un subconjunto de N
(2) $D_3 \cap D_{20}$	(4) $D_s \cap D_t$	(6) $\bigcap_{i \in N} D_i$

Solución:

(1) Como $]0, 1/3[$ es un superconjunto de $]0, 1/7[$, $D_3 \cup D_7 = D_3$.

(2) Como $]0, 1/20[$ es un subconjunto de $]0, 1/3[$, $D_3 \cap D_{20} = D_{20}$.

(3) Sea $m = \min(s, t)$, esto es, el menor de los dos números s y t; entonces D_m es igual a D_s o a D_t y contiene al otro como subconjunto. Así, pues, $D_s \cup D_t = D_m$.

(4) Sea $M = \max(s, t)$, esto es, el mayor de los dos números. Entonces $D_s \cap D_t = D_M$.

(5) Sea $a \in A$ el menor numero natural en A. Entonces $\bigcup_{i \in A} D_i = D_a$.

(6) Si x es un número real, hay entonces al menos un número i, tal que $x \notin]0, 1/i[$. Por tanto, $\bigcap_{i \in N} D_i = \varnothing$.

9. Demostrar: $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.

Solución:

Si x pertenece a $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$, entonces $x \in B$ y $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)$; así, pues, existe un i_0 tal que $x \in A_{i_0}$. Por consiguiente, x pertenece a $B \cap A_{i_0}$, lo cual implica que x pertenece a $\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$. Como $x \in B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$ implica $x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

$$B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) \subset \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

Si y pertenece a $\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, hay entonces un i_0 tal que $y \in B \cap A_{i_0}$; así, pues, $y \in B$ e $y \in A_{i_0}$. Por tanto, y es elemento de $\bigcup_{i \in I} A_i$. Como $y \in B$ e $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$, y está en $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$. Por consiguiente,

$$\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \subset B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$$

Por la Definición 1-1,

$$B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

10. Demostrar: Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indizada de conjuntos y es $i_0 \in I$,

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

Solución:

Sea $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, entonces $x \in A_i$ para todo $i \in I$. En particular $x \in A_{i_0}$. Por tanto

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$$

Sea $y \in A_{i_0}$. Como $i_0 \in I$, $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$. En consecuencia

$$A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

11. Sea la familia indizada $\{A_i\}_{i \in Z \times Z}$ de subconjuntos de $R \times R$ definida por

$$A_{(r,s)} = \{(x, y) \mid x \in R,\ r \le x \le r + 1,\ y \in R,\ s \le y \le s + 1\}$$

(1) Representar $A_{(2,3)}$ en un diagrama de coordenadas de $R \times R$.

(2) Representar $\quad B = \bigcup_{k=0}^{2} (\bigcup_{j=-2}^{1} A_{(j,k)}) = \bigcup_{k=0}^{2} \bigcup_{j=-2}^{1} A_{(j,k)}$

en el diagrama de coordenadas de $R \times R$ y escribir B en notación constructiva.

(3) Representar $\quad C = \bigcup_{k \in N} \bigcup_{j \in N} A_{(j,k)}$

donde N son los números naturales, en un diagrama de coordenadas de $R \times R$ y escribir C en notación constructiva.

Solución:

(1) $A_{(2,3)} = \{(x, y) \mid x \in [2, 3],\ y \in [3, 4]\}$, esto es, el conjunto de puntos cuya primera coordenada está entre 2 y 3 y cuya segunda coordenada está entre 3 y 4. Así, $A_{(2,3)}$ es la porción sombreada en la Figura 7-1.

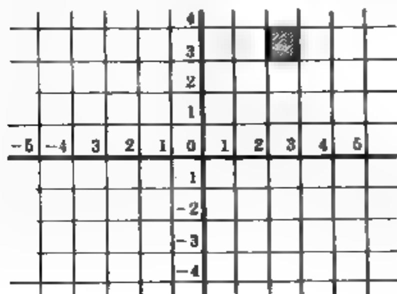


Fig. 7-1

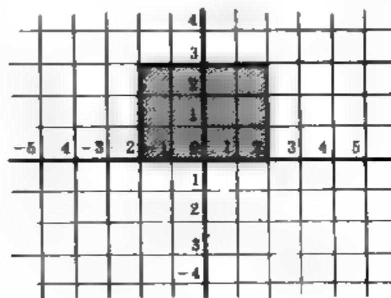


Fig. 7-2

(2) Nótese primero que $\quad B = \bigcup_{k=0}^{2} (A_{(-2,k)} \cup A_{(-1,k)} \cup A_{(0,k)} \cup A_{(1,k)})$

Y B consiste en doce «cuadrados», los sombreados en la Figura 7-2.
Así que $B = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$.

(3) Nótese primero que $\quad C = \bigcup_{k \in N} (A_{(1,k)} \cup A_{(2,k)} \cup A_{(3,k)} \cup \cdots)$

Así, pues, C es lo sombreado en la Figura 7-3

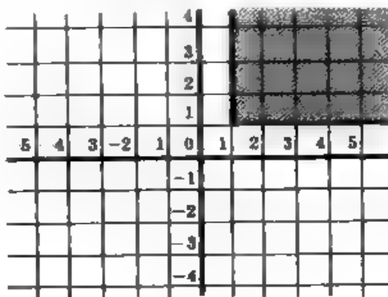


Fig. 7-3

Y entonces $C = \{(x, y) \mid x \ge 1,\ y \ge 1\}$.

PARTICIONES Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

12. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Decir si las siguientes familias de conjuntos son o no particiones de A

$$(1)\quad \{ B_1 = \{a,c,e\},\ B_2 = \{b\},\ B_3 = \{d,g\} \}$$
$$(2)\quad \{ C_1 = \{a,e,g\},\ C_2 = \{c,d\},\ C_3 = \{b,e,f\} \}$$
$$(3)\quad \{ D_1 = \{a,b,e,g\},\ D_2 = \{c\},\ D_3 = \{d,f\} \}$$
$$(4)\quad \{ E_1 = \{a,b,c,d,e,f,g\} \}$$

Solución:

(1) Nótese que $A \neq B_1 \cup B_2 \cup B_3$ porque $f \in A$ pero $f \notin (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$. Así que $\{B_1, B_2, B_3\}$ no es una particion de A.

(2) Obsérvese que $C_1 \neq C_3$ y que, además, C_1 y C_3 no son disjuntos, puesto que $e \in C_1$ y $e \in C_3$. Así, pues, $\{C_1, C_2, C_3\}$ no es una partición de A.

(3) Como $A = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ y los conjuntos son disjuntos dos a dos, $\{D_1, D_2, D_3\}$ es una partición de A

(4) Aunque $\{E_1\}$ consiste en un solo conjunto, es una partición de A. Es decir, para cualquier conjunto no vacío A, la familia $\{A\}$ es una partición de A.

13. Demostrar el Teorema 7-2, o sea el teorema fundamental sobre las relaciones de equivalencia Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A y, para todo $\alpha \in A$, sea

$$B_\alpha = \{x \mid (x, \alpha) \in \mathcal{R}\}$$

Entonces la familia de conjuntos $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una partición de A.

Solución:

Para demostrar que $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una partición de A, hay que demostrar:

(1) $A = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

(2) Si B_r y B_s tienen elementos en común, es decir, si $B_r \cap B_s \neq \emptyset$, entonces $B_r = B_s$

Como $\mathcal{R}$ es reflexiva, es decir, como cada elemento está relacionado consigo mismo, $a \in B_a$ para todo $a \in A$, entonces (1) es cierto.

Sea $z \in B_r \cap B_s$. Entonces $\quad (z, r) \in \mathcal{R}$ y $(z, s) \in \mathcal{R}$

Para demostrar que $B_r = B_s$, sea x un elemento de B_r. Se tiene entonces

$$(x, r) \in \mathcal{R}$$

Por ser simétrica, $\quad (r, z) \in \mathcal{R}$

y por ser transitiva, $\quad (x, r) \in \mathcal{R}$ y $(r, z) \in \mathcal{R}$ implican $(x, z) \in \mathcal{R}$

y también $\quad (x, z) \in \mathcal{R}$ y $(z, s) \in \mathcal{R}$ implican $(x, s) \in \mathcal{R}$

Así, pues, x pertenece a B_s. Como x es un elemento cualquiera de B_r, B_r es un subconjunto de B_s. De igual manera, puede demostrarse que B_s es un subconjunto de B_r: por tanto,

$$B_r = B_s$$

Y en consecuencia, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una partición de A.

14. Dado el conjunto $N \times N$, esto es, el conjunto de pares ordenados de números naturales, sea $\mathcal{R}$ una relación en $N \times N$ definida por

$$(a, b) \text{ está relacionado con } (c, d)$$

lo que se escribirá $\quad (a, b) \simeq (c, d)$

si, y solo si, $\quad ad = bc$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y que, por tanto, induce una partición de $N \times N$

Solución:

Nótese que $(a, b) \simeq (a, b)$ ya que $ab = ba$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Supuesto $(a, b) \simeq (c, d)$, entonces $ad = bc$ lo que implica que $cb = da$. Luego $(c, d) \simeq (a, b)$ y $\mathcal{R}$ es simétrica.

Suponiendo ahora que $(a, b) \sim (c, d)$ y que $(c, d) \sim (e, f)$, se tiene $ad = bc$ y $cf = de$. Por tanto,

$$(ad)(cf) = (bc)(de)$$

y, por cancelación en ambos lados,

$$af = be$$

Con lo que $(a, b) \simeq (e, f)$, y $\mathcal{R}$ es transitiva.

De acuerdo con todo esto, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Si el par ordenado (a, b) se escribe como fracción $\frac{a}{b}$, la relación anterior $\mathcal{R}$ es en realidad la definición usual de igualdad de dos fracciones, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, y solo si, $ad = bc$.

15. Hallar todas las particiones de $A = \{a, b, c, d\}$

Solución:

Primero obsérvese que cada partición de A contiene 1, 2, 3 o 4 conjuntos diferentes. Las particiones son

(1) $\{\{a, b, c, d\}\}$

(2) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c, d\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b, d\}\}$, $\{\{d\}, \{a, b, c\}\}$,
$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

(3) $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$,
$\{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$, $\{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$

(4) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

Hay quince particiones diferentes.

Problemas propuestos

ALGEBRA DE CONJUNTOS Y DUALIDAD

16. Escribir el dual en cada uno de los siguientes casos

(1) $A \cup (A \cap B) = A$, (2) $(A \cup U) \cap (A \cap \emptyset) = \emptyset$, (3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup B$.

17. Demostrar $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$.

18. Demostrar: $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$.

19. Demostrar: $A \cup (A \cap B) = A$.

20. Demostrar: $A \cap (A \cup B) = A$.

CONJUNTOS INDIZADOS Y OPERACIONES GENERALIZADAS

21. Sea $A_n = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } n\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, donde $n \in N$, los números naturales.
Hallar: (1) $A_2 \cap A_7$; (2) $A_6 \cap A_8$; (3) $A_3 \cup A_{12}$; (4) $A_3 \cap A_{12}$; (5) $A_s \cup A_{st}$, donde $s, t \in N$, (6) $A_s \cap A_{st}$, donde $s, t \in N$

22. Sea $B_i =]i, i+1]$ un intervalo semiabierto, donde $i \in Z$, los enteros. Hallar, es decir, escribir en notación de intervalos.

(1) $B_4 \cup B_5$ (3) $\cup_{i=4}^{20} B_i$ (5) $\cup_{i=0}^{15} B_{s+i}$
(2) $B_6 \cap B_7$ (4) $B_s \cup B_{s+1} \cup B_{s+2}$, $s \in Z$ (6) $\cup_{i \in Z} B_{s+i}$

23. Sean $D_n = [0, 1/n]$, $S_n =]0, 1/n]$ y $T_n = [0, 1/n[$ donde $n \in N$, los números naturales. Hallar.
(1) $\cap_{n \in N} D_n$, (2) $\cap_{n \in N} S_n$, (3) $\cap_{n \in N} T_n$.

24. Sea la familia indizada $\{A_i\}_{i \in Z \times Z}$ de subconjuntos de $R \times R$ definida por

$$A_{(r,s)} = \{(x, y) \mid r \leq x \leq r+1,\ s \leq y \leq s+1\}$$

(Vease Problema 11.) Representar cada uno de los conjuntos que siguen en un diagrama cartesiano $R \times R$

(1) $A_{(1,2)} \cup A_{(1,3)} \cup A_{(1,4)}$, (2) $\cup_{i=0}^{3} A_{(i,1)}$, (3) $\cup_{i=-2}^{1} \cup_{j=0}^{3} A_{(i,j)}$, (4) $\cup_{i \in Z} (A_{(i,i)} \cup A_{(2,i)})$.

25. Demostrar: Si $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$ donde $n \in N$ los números naturales, y es J un subconjunto infinito de N entonces $\cap_{i \in J} A_i = \varnothing$

PARTICIONES Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

26. Dado $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ decir si cada una de las siguientes familias de conjuntos es o no una partición de W

(1) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$ (3) $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}$

(2) $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 6\}\}$ (4) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

27. Hallar todas las particiones de $V = \{1, 2, 3\}$.

28. Dado el conjunto $N \times N$ de pares ordenados de números naturales, sea $\mathcal{R}$ la relación en $N \times N$ definida por

(a, b) está relacionado con (c, d)

que se escribirá $(a, b) \sim (c, d)$

si, y solo si, $a + d = b + c$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y que, por tanto, induce una partición de $N \times N$

Respuestas a los problemas propuestos

16. (1) $A \cap (A \cup B) = A$ (2) $(A \cap \varnothing) \cup (A \cup U) = U$ (3) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B$

17.

	Proposición	Razón
1	$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B)$	1. Ley distributiva
2	$A \cup A' = U$	2. Ley del complemento
3	$A \cup (A' \cap B) = U \cap (A \cup B)$	3. Sustitución
4	$= A \cup B$	4. Ley de identidad

18. *Método 1* El dual de este teorema se demostró en el problema anterior, luego este teorema es cierto por el principio de dualidad.

Método 2

	Proposición	Razón
1	$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B)$	1. Ley distributiva
2	$A \cap A' = \varnothing$	2. Ley del complemento
3	$A \cap (A' \cup B) = \varnothing \cup (A \cap B)$	3. Sustitución
4	$= A \cap B$	4. Ley de identidad

19.

	Proposición	Razón
1	$A \cap U = A$	1. Ley de identidad
2	$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$	2. Sustitución
3	$= A \cap (U \cup B)$	3. Ley distributiva
4	$= A \cap U$	4. Ley de identidad, sustitución
5	$= A$	5. Ley de identidad

20. *Metodo* 1 El dual de este teorema se demostró en el problema que precede, así que este teorema es cierto por el principio de dualidad

Metodo 2

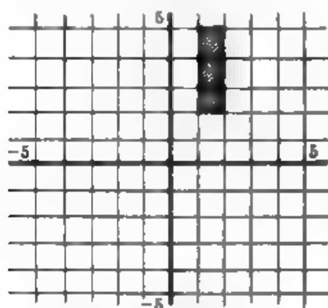
	Proposición		**Razón**
1	$A \cup \emptyset = A$	1.	Ley de identidad
2	$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$	2.	Sustitucion
3	$= A \cup (\emptyset \cap B)$	3.	Ley distributiva
4	$= A \cup \emptyset$	4.	Ley de identidad, sustitucion
5	$= A$	5.	Ley de identidad

21. (1) A_{14}, (2) A_{24}, (3) A_3, (4) A_{12}, (5) A_s, (6) A_{st}

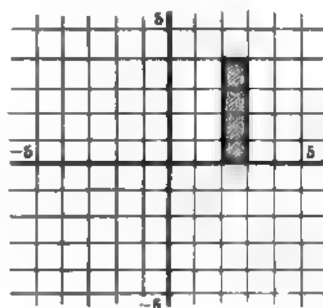
22. (1) $]4, 6]$, (2) $\emptyset$, (3) $]4, 21]$, (4) $]s, s + 3]$, (5) $]s, s + 16]$, (6) $]-\infty, \infty[$

23. (1) $\{0\}$, (2) $\emptyset$, (3) $\{0\}$

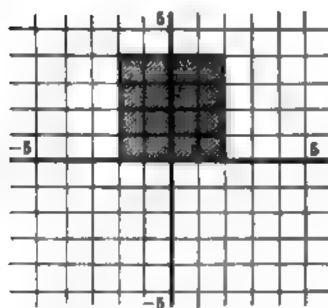
24.



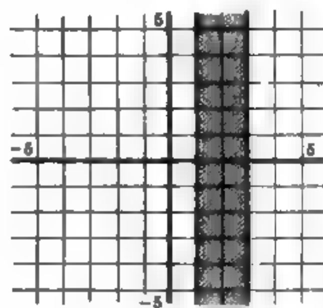
(1)



(2)



(3)



(4)

25. Sea m un numero natural Como J es infinito, existe un $i_0 \in J$ tal que $i_0 > m$ Entonces $m \notin A_{i_0}$, y, por tanto, $m \notin \bigcap_{i \in J} A_i$

Como m es cualquiera, $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$.

26. (1) No, (2) No. (3) Si. (4) Si

27. Hay cinco particiones diferentes de V:

$\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

28. Notese que $(a, b) \simeq (a, b)$, pues $a + b = b + a$, así que $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Suponiendo que $(a, b) \simeq (c, d)$, es $a + d = b + c$ lo que implica que $c + b = d + a$ Asi que $(c, d) \simeq (a, b)$ y $\mathcal{R}$ es simetrica

Suponiendo ahora que $(a, b) \simeq (c, d)$ y que $(c, d) \simeq (e, f)$ se tiene entonces $a + d = b + c$ y $c + f = d + e$. Por tanto,

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e)$$

y, restando $c + d$ de ambos lados, $a + f = b + e$ Asi, pues, $(a, b) \simeq (e, f)$ y, por tanto, $\mathcal{R}$ es transitiva.

Segun esto, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Capítulo 8

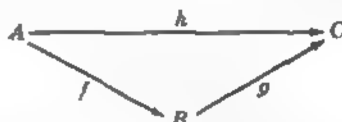
Complementos a la teoría de funciones, operaciones

FUNCIONES Y DIAGRAMAS

Como ya se ha dicho antes, el símbolo

$$A \xrightarrow{f} B$$

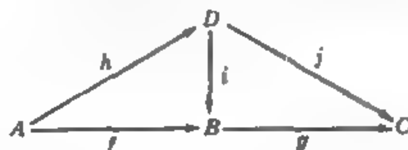
denota una función de A en B. De manera semejante, en el diagrama



las letras A, B y C denotan conjuntos; las flechas f, g y h denotan funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : A \to C$, y *la sucesión de flechas* $\{f, g\}$ *denota la función producto de composición o función compuesta* $g \circ f : A \to C$. Cada una de las funciones $h : A \to C$ y $g \circ f : A \to C$, o sea, cada flecha o sucesión de flechas que unen a A con C se dice un *camino* de A a C.

Definición 8-1: Se dice de un diagrama de funciones que es *conmutativo*, si para cualesquiera conjuntos X e Y del diagrama, dos caminos cualesquiera de X a Y son equivalentes.

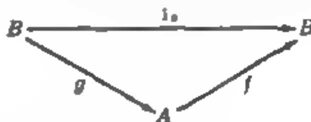
Ejemplo 1-1: Suponiendo que el diagrama de funciones siguiente es conmutativo,



entonces $i \circ h = f$, $g \circ i = j$ y $g \circ f = j \circ h = g \circ i \circ h$.

Ejemplo 1-2: La función $f : A \to B$ y la $g : B \to A$ son recíprocas si, y solamente si, los diagramas siguientes son conmutativos





Aquí 1_A y 1_B son las funciones idénticas.

RESTRICCION Y PROLONGACION DE UNA FUNCION

Sea f una función de A en C, es decir, sea $f : A \to C$ y sea B un subconjunto de A. Entonces f induce una función $f' : B \to C$ que se define por

$$f'(b) = f(b)$$

para todo $b \in B$. La función f' se llama *restricción* de f a B y se la denota por

$$f \mid B$$

Ejemplo 2-1: Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces

$$f \mid N = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots\}$$

es la restricción de f a N, los números naturales.

Ejemplo 2-2: El conjunto $g = \{(2, 5), (5, 1), (3, 7), (8, 3), (9, 5)\}$ es una función de $\{2, 5, 3, 8, 9\}$ en N. Y entonces

$$\{(2, 5), (3, 7), (9, 5)\}$$

un subconjunto de g, es la restricción de g a $\{2, 3, 9\}$, que es un conjunto de primeros elementos de los pares ordenados en g.

Se puede considerar esto desde otro punto de vista. Sea $f: A \to C$ y sea B un superconjunto de A. Entonces una función $F: B \to C$ se llama *prolongación* de f si, para todo $a \in A$,

$$F(a) = f(a)$$

Ejemplo 2-3: Sea f la función definida por $f(x) = x$ en los números reales positivos, o sea la función idéntica. Entonces la función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es una extensión de f a todos los números reales.

Ejemplo 2-4: Dada la función

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (7, 2)\}$$

cuyo dominio de definición es $\{1, 3, 7\}$, la función

$$F = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 2)\}$$

que es un superconjunto de la función f, es una prolongación de f

FUNCIONES DE CONJUNTO

Sea f una función de A en B y sea T un subconjunto de A, es decir, $A \xrightarrow{f} B$ y $T \subset A$. Entonces

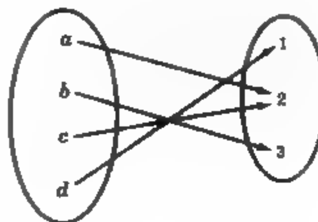
$$f(T)$$

que se lee «f de T», se define como el conjunto de las imágenes de los elementos de T O sea,

$$f(T) = \{x \mid f(a) = x,\ a \in T,\ x \in B\}$$

Es de notar que $f(T)$ es un subconjunto de B.

Ejemplo 3-1: Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $T = \{b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Defínida $f: A \xrightarrow{f} B$ por



resulta que $f(T) = \{2, 3\}$.

Ejemplo 3-2: Sea $g: R \to R$ definida por $g(x) = x^2$, y sea $T = [3, 4]$. Entonces

$$g(T) = [9, 16] = \{x \mid 9 \leq x \leq 16\}$$

Sea ahora $\mathscr{A}$ la familia de subconjuntos de A y sea $\mathscr{B}$ la familia de subconjuntos de B. Si $f: A \to B$, se tiene que f asigna a cada conjunto $T \in \mathscr{A}$ un conjunto único $f(T) \in \mathscr{B}$. Dicho de otra manera, la función $f: A \to B$ induce una función $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Si bien cada función de éstas se denota por la misma letra f, las dos son funciones esencialmente distintas. Se ve que el dominio de definición de $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ consiste en conjuntos.

En general, se dice que una función es una *función de conjunto* si su dominio de definición consiste en conjuntos.

FUNCIONES NUMERICAS REALES†

Una función $f: A \to R$ que aplica un conjunto en los números reales, esto es, que asigna a cada $a \in A$ un número real $f(a) \in R$, se llama *función numérica real*. Las funciones que se estudian por lo común en las matemáticas elementales, tales como

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ t(x) &= \text{sen } x, \cos x \text{ o } \operatorname{tg} x \\ f(x) &= \log x \text{ o } e^x \end{aligned}$$

es decir, los polinomios, las funciones trigonométricas y las logarítmica y exponencial son ejemplos de funciones numéricas reales.

ALGEBRA DE LAS FUNCIONES NUMERICAS REALES

Sea $\mathscr{F}_D$ la familia de todas las funciones reales que tienen el mismo dominio de definición D. Se definen entonces varias operaciones algebraicas en $\mathscr{F}_D$. En especial, sean $f: D \to R$ y $g: D \to R$ y sea $k \in R$. Se tienen entonces las funciones siguientes definidas como aparece al frente de cada una:

$$\begin{array}{rll} (f+k): D \to R & \text{por} & (f+k)(x) \equiv f(x)+k \\ (|f|): D \to R & \text{por} & (|f|)(x) \equiv |f(x)| \\ (f^n): D \to R & \text{por} & (f^n)(x) \equiv (f(x))^n \\ (f \pm g): D \to R & \text{por} & (f \pm g)(x) \equiv f(x) \pm g(x) \\ (kf): D \to R & \text{por} & (kf)(x) \equiv k(f(x)) \\ (fg): D \to R & \text{por} & (fg)(x) \equiv f(x)g(x) \\ (f/g): D \to R & \text{por} & (f/g)(x) \equiv f(x)/g(x) \qquad (\text{donde } g(x) \neq 0) \end{array}$$

Obsérvese que $(fg): D \to R$ no es lo mismo que el producto de composición de funciones visto anteriormente.

Ejemplo 4-1: Sean $D = \{a, b\}$ y $f: D \to R$ y $g: D \to R$ definidas por

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3 \quad \text{y} \quad g(a) = 2,\ g(b) = -1$$

O sea,

$$f = \{(a, 1), (b, 3)\} \quad \text{y} \quad g = \{(a, 2), (b, -1)\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (3f - 2g)(a) &\equiv 3f(a) - 2g(a) = 3(1) - 2(2) = -1 \\ (3f - 2g)(b) &\equiv 3f(b) - 2g(b) = 3(3) - 2(-1) = 11 \end{aligned}$$

es decir, $3f - 2g = \{(a, -1), (b, 11)\}$.

Además, como $|g|(x) \equiv |g(x)|$ y $(g+3)(x) \equiv g(x) + 3$,

$$|g| = \{(a, 2), (b, 1)\} \quad \text{y} \quad g + 3 = \{(a, 5), (b, 2)\}$$

Ejemplo 4-2: Sean $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por las fórmulas

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Se obtienen entonces fórmulas que definen las funciones $(3f - 2g): R \to R$ y $(fg): R \to R$ así

$$\begin{aligned} (3f - 2g)(x) &= 3(2x - 1) - 2(x^2) = -2x^2 + 6x - 3 \\ (fg)(x) &= (2x - 1)(x^2) = 2x^3 - x^2 \end{aligned}$$

REGLA DEL MAXIMO DOMINIO

Una fórmula como

$$f(x) = 1/x, \quad g(x) = \text{sen } x, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

no define sola una función al menos que se dé, explícita o implícitamente, un dominio de definición, o sea el conjunto de números en el cual la fórmula sí define una función. Así que se requieren expresiones como éstas:

† Si $A \subset R$, o sea si el dominio de definición es un subconjunto de números reales, la función se dice real de variable real, o real simplemente. — *N. del T.*

Sea $f(x) = x^2$ definida en $[-2, 4]$.
Sea $g(x) = \text{sen } x$ definida para $0 \leq x \leq 2\pi$.

No obstante, si el dominio de definición de una función dada por una fórmula es el máximo conjunto de numeros reales para los cuales la fórmula da un número real, como, por ejemplo, en

$$f(x) = 1/x \text{ para } x \neq 0$$

entonces el dominio de definición no se enuncia por lo común explícitamente Esta convención se suele llamar *regla del máximo dominio.*

Ejemplo 5-1: Sean las funciones siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 && \text{para } x \geq 0 \\ f_2(x) &= 1/(x-2) && \text{para } x \neq 2 \\ f_3(x) &= \cos x && \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi \\ f_4(x) &= \operatorname{tg} x && \text{para } x \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in N \end{aligned}$$

Los dominios de f_2 y f_4 no hubiera sido necesario decirlos explícitamente, pues cada uno consta de todos aquellos números para los cuales la formula tiene significado, o sea que las funciones bien se hubieran podido definir escribiendo

$$f_2(x) = 1/(x-2) \quad \text{y} \quad f_4(x) = \operatorname{tg} x$$

Ejemplo 5-2: Sea la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, su dominio de definición, al menos que se diga otra cosa, es $[-1, 1]$. Se supone implícitamente que el codominio es R

FUNCIONES CARACTERISTICAS

Sea A un subconjunto cualquiera de un conjunto universal U. La función numérica real

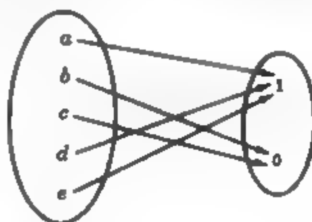
$$\chi_A : U \to \{1, 0\}$$

definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

se llama *función característica* de A.

Ejemplo 6-1: Sean $U = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{a, d, e\}$ La función de U en $\{1, 0\}$ definida por el diagrama



es la función característica χ_A de A.

Obsérvese además que cualquier función $f : U \to \{1, 0\}$ define un subconjunto

$$A_f = \{x \mid x \in U,\ f(x) = 1\}$$

de U y que la función característica χ_{A_f} de A_f es la función original f. Asi, pues, hay una correspondencia biunívoca entre todos los subconjuntos de U, o sea, el conjunto potencia de U, y el conjunto de todas las funciones de U en $\{1, 0\}$.

FUNCIONES DE ELECCION

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de B. Una función

$$f : \{A_i\}_{i \in I} \to B$$

se dice *función de elección* si, para todo $i \in I$,

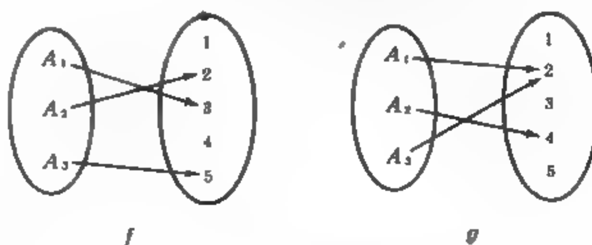
$$f(A_i) \in A_i$$

esto es, la imagen de cada conjunto es un elemento del conjunto.

Ejemplo 7-1: Sean los subconjuntos

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{1, 3, 4\}, \quad A_3 = \{2, 5\}$$

de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y considérense las siguientes funciones de $\{A_1, A_2, A_3\}$ en B



f *g*

Notese que f no es función de elección porque $f(A_2) = 2$, no pertenece a A_2, esto es, $f(A_2) \notin A_2$; y asimismo que g es función de elección puesto que $g(A_1) \in A_1$, $g(A_2) \in A_2$ y $g(A_3) \in A_3$.

Observación 8-1: En esencia, una función de elección en una familia dada de conjuntos, «elige» un elemento de cada conjunto de la familia. Si existe o no una función de elección en una familia arbitraria de conjuntos, es problema fundamental de la teoría de conjuntos al cual se dedicará el Capitulo 11.

OPERACIONES

Son bien conocidas las operaciones de adición y multiplicación de números, la unión y la intersección de conjuntos y la composición de funciones, operaciones que se denotan por

$$a + b = c, \quad a \cdot b = c, \quad A \cup B = C, \quad A \cap B = C, \quad g \circ f = h$$

En cada caso se le hace corresponder un elemento (c, C o h) a un par dado de elementos O sea que hay una función que asigna un elemento a cada par ordenado de elementos Hablando con precision, se tiene la

Definición 8-2: Una operación α en un conjunto A es una función del producto cartesiano $A \times A$ en A, es decir,

$$\alpha : A \times A \to A$$

Observación 8-2: La operación $\alpha : A \times A \to A$ se dice *operación binaria*, una operación n-aria es la función definida por

$$\alpha : \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{(n \text{ conjuntos})} \to A$$

Aquí se seguirá diciendo operación en vez de operación binaria

OPERACIONES CONMUTATIVAS

La operación $\alpha : A \times A \to A$ se dice *conmutativa* si, para todo $a, b \in A$,

$$\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$$

Ejemplo 8-1: La adición y la multiplicación de numeros reales son conmutativas pues

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba$$

Ejemplo 8-2: Sea $\alpha : R \times R \to R$ la operacion de sustraccion definida por $\alpha : (x, y) \to x - y$

Entonces $\alpha(5, 1) = 4$ y $\alpha(1, 5) = -4$

Asi que la sustracción no es operación conmutativa.

Ejemplo 8-3: La unión y la intersección de conjuntos son operaciones conmutativas, ya que

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad A \cap B = B \cap A$$

OPERACIONES ASOCIATIVAS

La operación $\alpha : A \times A \to A$ se dice *asociativa* si, para todo $a, b, c \in A$,

$$\alpha(\alpha(a, b), c) = \alpha(a, \alpha(b, c))$$

O sea que si se escribe $\alpha(a, b)$ en la forma $a * b$, α es asociativa si

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Ejemplo 9-1: La adición y la multiplicación de números reales son operaciones asociativas, pues

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{y} \qquad (ab)c = a(bc)$$

Ejemplo 9-2: Sea $\alpha : R \times R \to R$ la operación de división definida por $\alpha : (x, y) \mapsto x/y$. Entonces

$$\alpha(\alpha(12, 6), 2) = \alpha(2, 2) = 1$$
$$\alpha(12, \alpha(6, 2)) = \alpha(12, 3) = 4$$

La división no es, pues, una operación asociativa.

Ejemplo 9-3: La unión y la intersección de conjuntos son operaciones asociativas puesto que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{y} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

OPERACIONES DISTRIBUTIVAS

Considerando las dos operaciones siguientes:

$$\alpha : A \times A \to A$$
$$\beta : A \times A \to A$$

se dice que α es *distributiva respecto* de la operación β si, para todo $a, b, c \in A$,

$$\alpha(a, \beta(b, c)) = \beta(\alpha(a, b), \alpha(a, c))$$

O bien, escribiendo $\alpha(a, b)$ en la forma $a * b$, y $\beta(a, b)$ como $a \Delta b$, es α distributiva con respecto a β si

$$a * (b \Delta c) = (a * b) \Delta (a * c)$$

Ejemplo 10-1: La operación de multiplicación de números reales es distributiva con respecto a la adición de números reales, pues

$$a(b + c) = ab + ac$$

Pero la adición de números reales no es distributiva respecto de la multiplicación, porque

$$a + (bc) \neq (a + b)(a + c)$$

Ejemplo 10-2: Las operaciones unión e intersección de conjuntos son distributivas cada una respecto de la otra, puesto que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ELEMENTO NEUTRO

Sea $\alpha : A \times A \to A$ una operación escrita $\alpha(a, b) = a * b$. Se dice que un elemento $e \in A$ es *elemento neutro* para la operación α si, para todo elemento $a \in A$,

$$e * a = a * e = a$$

Ejemplo 11-1: Sea $\alpha : R \times R \to R$ la operación de adición. Aquí es 0 un elemento neutro para la adición porque, para todo número real, $a \in R$,

$$0 * a = a * 0 = a, \quad \text{esto es,} \quad 0 + a = a + 0 = a$$

Ejemplo 11-2: Sea la operación de intersección de conjuntos. El conjunto universal U es un elemento neutro aquí, porque para todo conjunto A (que es un subconjunto de U)

$$U * A = A * U = A \quad \text{esto es,} \quad U \cap A = A \cap U = A$$

Ejemplo 11-3: Sea la operación de multiplicación de números reales. Aquí es el número 1 un elemento neutro porque, para todo número real a,

$$1 * a = a * 1 = a, \quad \text{esto es,} \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Teorema 8-1: Si una operación $\alpha : A \times A \to A$ tiene un elemento neutro $e \in A$, éste es único.

Así, pues, se puede hablar *del* elemento neutro para una operación en vez de *un* elemento neutro.

ELEMENTOS SIMETRICOS

Sea $\alpha : A \times A \to A$ una operación denotada $\alpha(a, b) = a * b$ y sea $e \in A$ el elemento neutro para α. Se llama elemento *simétrico* de un elemento $a \in A$, denotado por

$$a^{-1}$$

un elemento de A tal que

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

Ejemplo 12-1: Dada la operación de adición de números reales, para la cual es 0 el elemento neutro, para cualquier número real a, su opuesto $(-a)$ es su *simétrico aditivo*, ya que

$$-a * a = a * -a = 0, \quad \text{esto es,} \quad (-a) + a = a + (-a) = 0$$

Ejemplo 12-2: Dada la operación de multiplicación de números racionales, para la cual es 1 el elemento neutro, todo número racional no nulo p/q, donde p y q son enteros, tiene por *simétrico multiplicativo* su inverso q/p, pues

$$(q/p)(p/q) = (p/q)(q/p) = 1$$

Ejemplo 12-3: Sea $\alpha : N \times N \to N$ la operación de multiplicación para la cual es 1 el elemento neutro, si N es el conjunto de los numeros naturales, 2 no tiene simétrico multiplicativo, pues no existe ningún elemento $x \in N$ tal que

$$x \cdot 2 = 2 \cdot x = 1$$

En realidad, ningun elemento de N aparte el 1, tiene simétrico multiplicativo. El simétrico de 1 es él mismo.

OPERACIONES Y SUBCONJUNTOS

Dada una operación $\alpha : A \times A \to A$ y un subconjunto B de A, se dice que B es *cerrado con respecto a la operación* α si, para todo $b, b' \in B$,

$$\alpha(b, b') \in B$$

esto es, si

$$\alpha(B \times B) \subset B$$

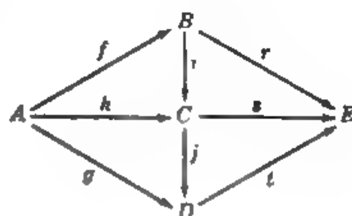
Ejemplo 13-1: El conjunto de los numeros pares es cerrado respecto de la adición de números naturales, ya que la suma de dos pares cualesquiera es siempre par. En cambio, el conjunto de los números impares no es cerrado respecto de la operación de adición dicha, pues la suma de dos numeros impares no es impar.

Ejemplo 13-2: Los cuatro numeros complejos, $1, -1, i, -i$, forman un conjunto cerrado respecto de la operación de multiplicación.

Problemas resueltos

DIAGRAMAS Y FUNCIONES

1. En el diagrama de funciones anexo, ¿cuántos caminos hay de A a E y cuáles son?



Solución:

Hay seis caminos de A a E:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{r} E$ $\qquad$ $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{s} E$

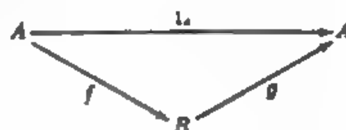
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{s} E$ $\qquad$ $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{j} D \xrightarrow{t} E$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} D \xrightarrow{t} E$ $\qquad$ $A \xrightarrow{g} D \xrightarrow{t} E$

esto es, $\quad r \circ f, \quad s \circ i \circ f, \quad t \circ j \circ i \circ f, \quad s \circ h, \quad t \circ j \circ h, \quad t \circ g$

Como ya se ha dicho, las funciones se escriben de derecha a izquierda.

2. Suponiendo conmutativo el diagrama adjunto, y siendo 1_A la función idéntica sobre A, enunciar todo lo que se puede inferir del diagrama.



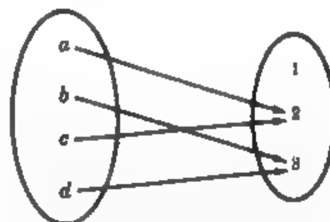
Solución:

Lo primero, como el diagrama es conmutativo, $g \circ f = 1_A$.

Además, como $g \circ f$ es inyectiva, f tiene que ser también inyectiva; y como $g \circ f$ es sobreyectiva, g ha de serlo también. No es necesariamente cierto que $g = f^{-1}$, pues no se sabe si $f \circ g = 1_B$

FUNCIONES DE CONJUNTO

3. Sean $W = \{a, b, c, d\}$, $V = \{1, 2, 3\}$ y $f: W \to V$ definida por el diagrama adjunto. Averiguar: (1) $f(\{a, b, d\})$, (1) $f(\{a, c\})$.



Solución:

(1) Procediendo como sigue:

$$f(\{a, b, d\}) = \{f(a), f(b), f(d)\} = \{2, 3, 3\} = \{2, 3\}$$

(2) Asimismo,

$$f(\{a, c\}) = \{f(a), f(c)\} = \{2, 2\} = \{2\}$$

Nótese que $f(\{a, c\}) = 2$ es un enunciado *incorrecto*, puesto que la imagen del conjunto $\{a, c\}$ en este caso, es un subconjunto de V, que es el $\{2\}$ y no un elemento de V.

4. Demostrar que si $f: A \to B$ es inyectiva, la función de conjunto inducida $f: 2^A \to 2^B$ es también inyectiva. 2^A y 2^B son los conjuntos potencia de A y B, respectivamente.

Solución:

Sean X e Y dos subconjuntos distintos de A, es decir,

$$X \in 2^A, \quad Y \in 2^A, \quad X \neq Y$$

Existe entonces un elemento $z \in A$ tal que

$$z \in X, \quad z \notin Y \qquad (\text{o} \quad z \in Y, \quad z \notin X)$$

Así que $f(z) \in f(X)$ y como f es inyectiva, $f(z) \notin f(Y)$ (o bien $f(z) \in f(Y)$ y $f(z) \notin f(X)$). Por tanto, $f(X) \neq f(Y)$ y, por definición, la función de conjunto inducida es también inyectiva.

5. Demostrar que si $f: A \to B$ es sobreyectiva, la función de conjunto inducida $f: 2^A \to 2^B$ es también sobreyectiva

Solución:

Hay que demostrar que cada conjunto de 2^B es imagen de un conjunto de 2^A por lo menos. Sea $Y \in 2^B$. Puesto que f es sobreyectiva,

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid x \in A, f(x) \in Y\}$$

no es vacío. Pero Y es la imagen de $f^{-1}(Y)$, es decir, $f(f^{-1}(Y)) = Y$. Luego $f: 2^A \to 2^B$ es sobreyectiva.

FUNCIONES NUMERICAS REALES

6. Sea $W = \{a, b, c\}$ y sean f y g las siguientes funciones numéricas reales en W:

$$f(a) = 1,\ f(b) = -2,\ f(c) = 3 \qquad g(a) = -2,\ g(b) = 0,\ g(c) = 1$$

Encontrar las siguientes funciones: (1) $f + 2g$, (2) $fg - 2f$.

Solución:

(1) Calculando como sigue:

$$(f + 2g)(a) = f(a) + 2g(a) = 1 - 4 = -3$$
$$(f + 2g)(b) = f(b) + 2g(b) = -2 + 0 = -2$$
$$(f + 2g)(c) = f(c) + 2g(c) = 3 + 2 = 5$$

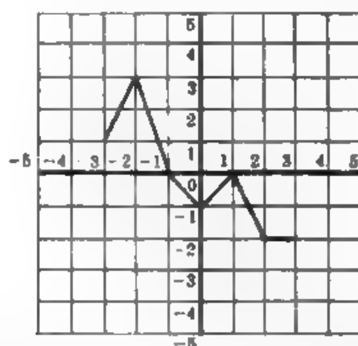
Así $f + 2g = \{(a, -3), (b, -2), (c, 5)\}$.

(2) Análogamente,

$$(fg - 2f)(a) \equiv f(a)\,g(a) - 2f(a) = (1)(-2) - 2(1) = -4$$
$$(fg - 2f)(b) \equiv f(b)\,g(b) - 2f(b) = (-2)(0) - 2(-2) = 4$$
$$(fg - 2f)(c) \equiv f(c)\,g(c) - 2f(c) = (3)(1) - 2(3) = -3$$

Luego $fg - 2f = \{(a, -4), (b, 4), (c, -3)\}$.

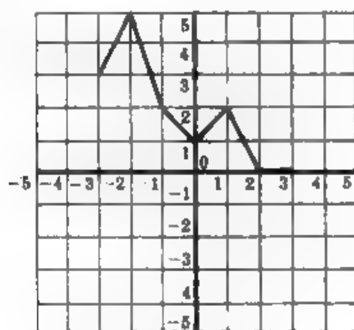
7. Sea f la función numérica real con dominio de definición $[-3, 3]$ que se representa en el diagrama de coordenadas siguiente:



Representar y describir el grafo de cada una de las siguientes funciones: (1) $f + 2$, (2) $|f|$.

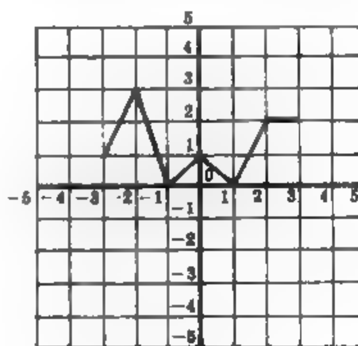
Solución:

(1) Ya que, por definición, $(f + 2)(x) \equiv f(x) + 2$, cada valor de la función original se aumenta en 2. Así que súbase todo el grado de f dos unidades para obtener el grafo de $f + 2$, como se ve en la Figura 8-1.



Representación de $f + 2$

Fig. 8-1



Representación de $|f|$

Fig. 8-2

(2) Obsérvese que

$$(|f|)(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Así que parte del grafo de $|f|$ es idéntica a la parte del grafo de f que está sobre el eje de las x; y el resto del grafo de $|f|$ se obtiene por simetría respecto del eje x, de la porción del grafo de f que está debajo del eje de las x. Véase la Figura 8-2.

8. Averiguar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones numéricas reales:

(1) $f_1(x) = 1/x$ donde $x > 0$ (3) $f_3(x) = \log(x-1)$

(2) $f_2(x) = \sqrt{3-x}$ (4) $f_4(x) = x^2$ donde $0 \le x \le 4$

Solución:

(1) El dominio aparece dado explícitamente como $\{x \mid x > 0\}$

(2) Como no se da explícitamente ningún dominio de definición, se aplica la regla del máximo dominio. Puesto que f_2 toma valores reales solamente cuando $3 - x \ge 0$, es decir, cuando $x \le 3$, el dominio de f_2 buscado es $\{x \mid x \le 3\}$.

(3) Puesto que no se da el dominio explícitamente, se aplica nuevamente la regla del máximo dominio. Como la función logarítmica real solo está definida para números positivos, f_3 tiene significado solamente si $x - 1 > 0$, o sea si $x > 1$. Así que el dominio de f_3 es $\{x \mid x > 1\}$.

(4) El dominio está dado explícitamente como $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$.

9. La función numérica real $0_A : A \to R$ definida por

$$0_A(x) = 0 \text{ para todo } x \in A$$

se llama *función cero* (sobre A). Demostrar que para cualquier función $f: A \to R$,

$$(1)\ f + 0_A = f \quad \text{y} \quad (2)\ f \cdot 0_A = 0_A$$

Solución:

(1) Ya que $(f + 0_A)(x) \equiv f(x) + 0_A(x) = f(x) + 0 = f(x)$ para todo $x \in A$, $f + 0_A = f$

(2) También, $(f \cdot 0_A)(x) \equiv f(x) \cdot 0_A(x) = f(x) \cdot 0 = 0 \equiv 0_A(x)$ para todo $x \in A$. Luego $f \cdot 0_A = 0_A$.

Nótese que la función cero tiene propiedades muy parecidas a las del número 0.

10. Dada la función real $f = \{(1, 2), (2, -3), (3, -1)\}$ (de dominio $\{1, 2, 3\}$), averiguar (1) $f + 4$, (2) $|f|$, (3) f^2.

Solución:

(1) Como, por definición, $(f + 4)(x) \equiv f(x) + 4$, basta sumar 4 a cada valor de la función, esto es, sumar 4 al segundo elemento en cada par ordenado de f. Así que

$$f + 4 = \{(1, 6), (2, 1), (3, 3)\}$$

(2) Como $|f|(x) = |f(x)|$, sustituir el segundo elemento de cada par de f por su valor absoluto. Entonces

$$|f| = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

(3) Puesto que $f^2(x) = (f(x))^2$, cambiar en cada par de f el segundo elemento por su cuadrado. Se tiene, pues:

$$f^2 = \{(1, 4), (2, 9), (3, 1)\}$$

PROBLEMAS DIVERSOS SOBRE FUNCIONES

11. Demostrar que si A y B son subconjuntos de un conjunto universal U, entonces $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

Solución:

Sea $x \in A \cap B$; por tanto, $x \in A$ y $x \in B$. Luego

$$\chi_{A \cap B}(x) = 1, \qquad (\chi_A \chi_B)(x) \equiv \chi_A(x)\,\chi_B(x) = (1)(1) = 1$$

Sea $y \in (A \cap B)'$; por tanto, $y \in A' \cup B'$ y entonces $y \in A'$ o bien $y \in B'$. Entonces $\chi_{A \cap B}(y) = 0$. Asimismo, $(\chi_A \chi_B)(y) = \chi_A(y)\chi_B(y) = 0$ porque $\chi_A(y) = 0$ o bien $\chi_B(y) = 0$.

Así, pues, $\chi_{A \cap B}$ y $\chi_A \chi_B$ asignan el mismo número a cada elemento de U. Entonces, por definición,

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

12. Sea la función: $f(x) = x$ siendo $x \ge 0$. Entre las funciones siguientes, decir cuáles son o no prolongaciones de f.

(1) $g_1(x) = x$ donde $x \ge -2$ (3) $1 : R \to R$ (5) $g_4(x) = x$ donde $x \in [-1, 1]$

(2) $g_2(x) = |x|$ para todo $x \in R$ (4) $g_3(x) = (x + |x|)/2$

Solución:

Tener en cuenta que una función f' es una prolongación de f si, en primer lugar, el dominio de definición de f' es un superconjunto de $[0, \infty[$, el dominio de f, y en segundo lugar, si $f'(x) = x$ para todo $x \in [0, \infty[$.

(1) Como g_1 satisface ambas condiciones, g_1 es una prolongación de f.

(2) Como $g_2(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \infty) \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

la función valor absoluto es una prolongación de f.

(3) Por definición de la función idéntica, $1(x) = x$ para todo $x \in R$. Así que la función idéntica es una prolongación de f.

(4) Como $g_3(x) = (x + |x|)/2 = \begin{cases} (x + x)/2 = x & \text{si } x \in [0, \infty) \\ (x - x)/2 = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, g_3 es una prolongación de f

(5) El dominio de definición de g_4 no contiene al dominio de f, por tanto, g_4 no es una prolongación de f

13. Como conjuntos, ¿qué relación hay entre una función $f: A \to B$ y la restricción de f a un subconjunto A' de A?

Solución:

La restricción de f a A', es decir $f|A'$, es un subconjunto de f. Pues $x \in A'$ implica $x \in A$ y entonces

$$(x, f(x)) \in f|A' \quad \text{implica} \quad (x, f(x)) \in f$$

14. Dados los subconjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 5\}$, $A_3 = \{2, 4, 5\}$ y $A_4 = \{3, 4\}$ de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, decir si cada una de las siguientes funciones de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ en B es o no función de elección.

(1) $f_1 = \{(A_1, 1), (A_2, 2), (A_3, 3), (A_4, 4)\}$

(2) $f_2 = \{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 4), (A_4, 4)\}$

(3) $f_3 = \{(A_1, 2), (A_2, 1), (A_3, 4), (A_4, 3)\}$

(4) $f_4 = \{(A_1, 3), (A_2, 5), (A_3, 1), (A_4, 3)\}$

Solución:

(1) Como $f_1(A_2) = 2$ no es elemento de A_2, f_1 no es función de elección.

(2) Observando que $f_2(A_i)$ pertenece a A_i para todo i, se ve que f_2 es una función de elección.

(3) Siendo $f_3(A_i) \in A_i$ para todo i, f_3 es función de elección.

(4) Como $f_4(A_3) = 1$ no pertenece a A_3, entonces f_4 no es una función de elección

OPERACIONES

15. Sea $\alpha: N \times N \to N$ la operación del mínimo común múltiplo, esto es,

$$\alpha(a, b) \equiv a * b = \text{mcm de } a \text{ y } b$$

(1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Averiguar el elemento neutro de α. (4) ¿Qué elementos de N, si los hay, tienen simétricos y cuáles son?

Solución:

(1) Como el mcm de a y b es el mcm de b y a, α es conmutativa.

(2) En teoría de los números se demuestra que $(a * b) * c = a * (b * c)$, es decir, que la operación del mcm es asociativa

(3) El número 1 es un elemento neutro puesto que el mcm de 1 y cualquier otro número a es a, esto es, $1 * a = a$ para todo $a \in N$.

(4) Como el mcm de dos números a y b es 1 si, y sólo si, $a = 1$ y $b = 1$, el único número que tiene simétrico es el 1 y él es su propio simétrico.

16. Dada la operación $\alpha: Q \times Q \to Q$ denotada y definida por

$$\alpha(a, b) \equiv a * b \equiv a + b - ab$$

donde Q es el conjunto de los números racionales, (1) ¿es α conmutativa?, (2) ¿es α asociativa? (3) Hallar el elemento neutro de α. (4) ¿Tiene algún elemento de Q un simétrico, y cuál es?

Solución:

(1)
$$a * b = a + b - ab$$
$$b * a = b + a - ba$$

Así, pues, α es conmutativa, porque la adición es asociativa y la multiplicación es conmutativa, esto es $ab = ba$.

(2)
$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b - ab) * c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c\\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c\\ &= a + b - ab + c - ac - bc + abc\\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b + c - bc)\\ &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)\\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc\end{aligned}$$

Luego α es asociativa.

(3) Un elemento e es un elemento neutro para α si $a * e = a$ para todo $a \in Q$. Calculando como sigue

$$a * e = a + e - ae = a, \quad e - ea = 0, \quad e(1 - a) = 0, \quad e = 0$$

resulta, pues, que 0 es el elemento neutro.

(4) Para que a tenga un simétrico x, habrá de ser $a * x = 0$, pues, según (3), 0 es el elemento neutro. Calculando como sigue:

$$a * x = 0, \quad a + x - ax = 0, \quad a = ax - x, \quad a = x(a - 1), \quad x = a/(a - 1)$$

Así que $a \neq 1$, a tiene simétrico que es $a/(a - 1)$.

17. Demostrar el Teorema 8-1: Si e y e' son elementos neutros (para la misma operación), es $e = e'$.

Solución:

Por hipótesis, $e * e' = e'$ y $e * e' = e$. Luego $e = e * e' = e'$.

18. Sea la operación unión de conjuntos. (1) Hallar el elemento neutro. (2) ¿Qué elementos, si los hay, tienen simétricos y cuáles son?

Solución:

(1) Nótese que $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ para todo conjunto A. Así que el conjunto vacío $\varnothing$ es el elemento neutro de la operación unión de conjuntos.

(2) Para que un conjunto A tenga un simétrico X, $A \cup X = \varnothing$. Como $A \cup X = \varnothing$ implica $A = \varnothing$ y $X = \varnothing$, el único conjunto que tiene un simétrico es el conjunto vacío, que es, a su vez, su propio simétrico.

19. Sea la operación $\alpha : A \times A \to A$ denotada por

$$\alpha(a, b) = a * b$$

supuesta asociativa y con un elemento neutro e. Si b y b' son simétricos del mismo elemento a, es $b = b'$. (Es decir, que el simétrico de un elemento es único.)

Demostración:

Según la hipótesis
$$b * (a * b') = b * e = b$$
$$(b * a) * b' = e * b' = b'$$

y como α es asociativa,
$$b * (a * b') = (b * a) * b'$$

y, por tanto, $b = b'$

20. Sea $\mathscr{F}_A$ el conjunto de todas las funciones de A en A. Sea α la operación de composición de funciones. (1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Averiguar el elemento neutro para α. (4) ¿Qué elementos, si los hay, tienen simétricos y cuáles son?

Solución:

(1) Si A tiene más de un elemento, entonces α no es conmutativa. Porque con $a \in A$, $b \in B$, $a \neq b$ y considerando las funciones constantes f y g definidas por $f(x) = a$, $g(x) = b$, se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(b) = a$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = b$$

(2) Por el Teorema 4-1, α es una operación asociativa.
(3) Un elemento neutro es la función idéntica $1_A : A \to A$ pues, según ya se ha visto, $(1_A \circ f) = (f \circ 1_A) = f$ para toda función $f \in \mathscr{F}_A$
(4) La funcion $f : A \to A$ tiene simétrica si, y solamente si, f es inyectiva y sobreyectiva; y su simétrica es la función recíproca f^{-1} que se definió en el Capitulo 4

21. Sea la operación $\alpha : N \times N \to N$ definida por

$$\alpha(a, b) \equiv a * b = a$$

(1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) ¿Existe elemento neutro? (4) ¿Tiene alguno de los elementos un simétrico? ¿Cuál?

Solución:

(1) Como $a * b = a$ y $b * a = b$, α no es conmutativa.
(2) Como $(a * b) * c = a * c = a$ y $a * (b * c) = a * b = a$, α es asociativa.
(3) Si α tiene un elemento neutro e entonces, por definición de elemento neutro, $e * a = a$ para todo $a \in N$. Pero por la definición de α, $e * a = e$. Así que no hay elemento neutro.
(4) No tiene sentido hablar de simétrico cuando no existe ni siquiera elemento neutro.

OPERACIONES Y SUBCONJUNTOS

22. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos de N, los números naturales, son o no cerrados respecto de la operación de multiplicación:

(1) $\{0, 1\}$
(2) $\{1, 2\}$
(3) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{x \mid x \text{ es par}\}$
(4) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{x \mid x \text{ es impar}\}$
(5) $\{x \mid x \text{ es primo}\}$
(6) $\{2, 4, 8, 16, \ldots\} = \{x \mid x = 2^n, n \in N\}$

[redacted]

(1) $$(0)(0) = 0, \quad (1)(0) = 0, \quad (0)(1) = 0, \quad (1)(1) = 1$$

Por lo que $\{0, 1\}$ es cerrado respecto de la multiplicación.
(2) Como $(2)(2) = 4 \notin \{1, 2\}$, $\{1, 2\}$ no es cerrado respecto de la multiplicación.
(3) El producto de números pares es par, así que el conjunto es cerrado respecto de la multiplicación.
(4) El producto de números impares es impar; este conjunto es, pues, cerrado respecto de la multiplicación.
(5) Teniendo en cuenta que 2 y 3 son primos, pero $(2)(3) = 6$ no lo es, se ve que el conjunto no es cerrado respecto de la multiplicación.
(6) Como $(2^r)(2^s) = 2^{r+s}$, el conjunto es cerrado respecto de la operación de multiplicación.

23. Entre los conjuntos del problema anterior decir cuáles son o no cerrados respecto de la operación de adición.

Solución:

El conjunto de los números pares, $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ es cerrado respecto de la adición porque la suma de dos números pares es par. Pero ninguno de los otros conjuntos es cerrado respecto de la adición, pues, por ejemplo,

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \notin \{0, 1\} \\ 1 + 2 &= 3 \notin \{1, 2\} \\ 3 + 5 &= 8 \notin \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \\ 3 + 5 &= 8 \notin \{x \mid x \text{ es primo}\} \\ 2 + 4 &= 6 \notin \{2, 4, 8, 16, \ldots\} \end{aligned}$$

24. Sean (1) $\mathscr{A}$ la familia de conjuntos finitos de números reales.
(2) $\mathscr{I}$ la familia de intervalos.
(3) $\mathscr{C}$ la familia de superconjuntos del intervalo unidad $[0, 1]$.

Establecer para cada una de estas familias de números reales si es o no cerrada respecto de la operación (*a*) unión, (*b*) intersección.

Solución:

(1) Como la unión y la intersección de conjuntos finitos son finitas, $\mathscr{A}$ es cerrada respecto de ambas operaciones.

(2) Como $[1, 2] \cup [3, 4]$ no es un intervalo, $\mathscr{I}$ no es cerrada respecto de la operación de unión. Como se vio en el Capítulo 3, la intersección de dos intervalos es un intervalo, así que $\mathscr{I}$ es cerrada respecto de la operación de intersección.

(3) Si $[0, 1] \subset A$ y $[0, 1] \subset B$, entonces $[0, 1] \subset (A \cup B)$ y $[0, 1] \subset (A \cap B)$. Así, pues $\mathscr{C}$ es cerrado respecto de ambas operaciones.

25. Demostrar. Sea $\alpha: A \times A \to A$ una operación asociativa con elemento neutro e, y sea B el conjunto de *elementos unitarios* de A, esto es, el conjunto de elementos de A que tienen simétrico. Entonces B es cerrado respecto de la operación α.

Solución:

Sean $a \in B$ y $b \in B$. Entonces a tiene un simétrico a^{-1} y b tiene un simétrico b^{-1}. Hay que demostrar que

$$\alpha(a, b) \equiv a * b \in B$$

es decir, que $a * b$ tiene simétrico.

Puesto que

$$\begin{aligned}(a * b)(b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) \\ &= a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

resulta que $a * b$ tiene por simétrico $b^{-1} * a^{-1}$ y, por tanto, $a * b \in B$.

Problemas propuestos

DIAGRAMAS Y FUNCIONES

26. En el diagrama de funciones de la Fig. 8-3, ¿cuántos caminos hay de A a D y cuáles son?

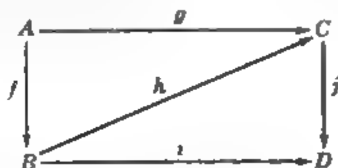


Fig. 8-3

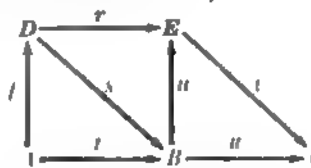


Fig. 8-4

27. Si el diagrama de la Fig. 8-4 es conmutativo, ¿qué funciones son equivalentes?

FUNCIONES DE CONJUNTO

28. Dado $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea $f: W \to W$ el conjunto de pares ordenados:

$$f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$$

Hallar: (1) $f(\{1, 2, 3\})$, (2) $f(\{1, 4\})$, (3) $f(\{2, 5\})$.

29. Dados $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{1, 2, 3\}$ y la

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 1)\}$$

Averiguar la función inducida $f: 2^S \to 2^T$.

FUNCIONES NUMERICAS REALES

30. Sean $V = \{a, b, c\}$ y las siguientes funciones numéricas reales f y g de V.

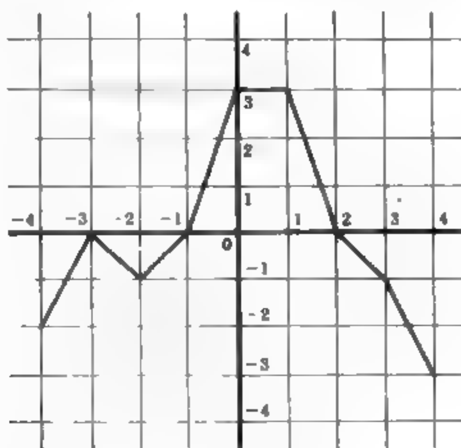
$$f = \{(a, 2), (b, -3), (c, -1)\}, \qquad g = \{(a, -2), (b, 0), (c, 1)\}$$

Hallar (1) $3f$, (2) $g + 2$, (3) $f + g$, (4) $2f - 5g$, (5) fg, (6) $|f|$, (7) f^3, (8) $|3f - fg|$.

31. Averiguar el dominio de definición de las funciones reales:

(1) $f(x) = x/(x+3)$ (3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(2) $f(x) = x/(x+3)$ donde $x > 0$ (4) $f(x) = \log(x^2)$

32. Sea f la función numérica real de dominio de definición $[-4, 4]$ representada en el diagrama de coordenadas:



Representar del mismo modo las funciones: (1) $f - 3$, (2) $|f|$.

FUNCIONES CARACTERISTICAS

33. Sean $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, e\}$, $B = \{c, d\}$ y $C = \{a, d, e\}$.
Hallar: (1) χ_A, (2) χ_B, (3) χ_C.

34. Sea $U = \{a, b, c, d\}$. Cada una de las funciones siguientes de U en $\{1, 0\}$ es una función característica de un subconjunto de U. Hallar cada subconjunto

(1) $\{(a, 1), (b, 0), (c, 0), (d, 1)\}$ (3) $\{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}$
(2) $\{(a, 0), (b, 1), (c, 0), (d, 0)\}$ (4) $\{(a, 1), (b, 1), (c, 0), (d, 1)\}$

35. Si la función característica χ_A es una función constante, ¿qué puede decirse del conjunto A?

PROBLEMAS DIVERSOS SOBRE FUNCIONES

36. Dada la función

$$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (8, 3)\}$$

cuyo dominio de definición es $\{1, 3, 4, 8\}$ y las funciones siguientes en las que x e y aparecen como incógnitas, ¿para qué valores de x e y, si los hay, será cada función una prolongación de la f?

(1) $f_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, x), (4, 6), (5, 8), (8, y)\}$
(2) $f_2 = \{(1, 2), (x, 3), (2, 3), (y, 6), (3, 5)\}$
(3) $f_3 = \{(4, 6), (x, 3), (3, 5), (5, y), (1, 2)\}$

37. En qué caso puede ser constante la restricción de una función característica χ_A a un conjunto B, esto es, la función $\chi_A | B$?

38. Dados los subconjuntos $A_1 = \{a, b, d\}$, $A_2 = \{c, d, e\}$, $A_3 = \{b\}$ de $B = \{a, b, c, d, e\}$, decir si cada una de las siguientes funciones de $\{A_1, A_2, A_3\}$ en B es una función de elección.

$$(1) \quad f_1 = \{(A_1, a), (A_2, b), (A_3, b)\}$$
$$(2) \quad f_2 = \{(A_1, d), (A_2, d), (A_3, b)\}$$
$$(3) \quad f_3 = \{(A_1, b), (A_2, e), (A_3, b)\}$$

OPERACIONES

39. Sea α la operación de intersección de conjuntos (1). ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Hallar el elemento neutro para α. (4) ¿Qué elementos, si los hay, tienen simétricos y cuáles son?

40. Sea α la operación de diferencia de conjuntos. Nótese que

$$A - B = A \cap B'$$

(1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa?

(3) Hacer ver con diagramas de Venn que la operación de unión no es distributiva con respecto a α, es decir, que en general

$$A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$$

(4) Demostrar que la operación de intersección es distributiva con respecto a α, esto es, que

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

41. Sea α la operación con conjuntos definida (y denotada) por

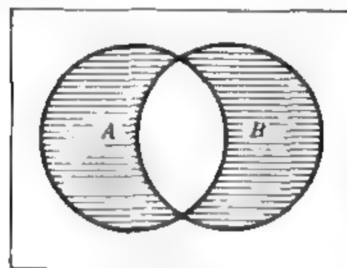
$$A \Delta B \equiv (A \cup B) - (A \cap B)$$

Esta operación se llama *diferencia simétrica*. (1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Hallar el elemento neutro. (4) Hallar el simétrico de un conjunto cualquiera A. (5) Mostrar con diagramas de Venn que la operación de unión no es distributiva con respecto a α, es decir, que, en general,

$$A \cup (B \Delta C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C)$$

(6) Demostrar que la operación de intersección es distributiva con respecto a α, o sea que

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$



$A \Delta B$ en rayado

42. Sea α la operacion en $Q \times Q$, el conjunto de pares ordenados de números racionales, definida (y denotada) por

$$(a, b) * (x, y) \equiv (ax, ay + b)$$

(1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Hallar el elemento neutro para α. (4) ¿Qué elementos, si los hay, tienen simétricos y cuáles son?

43. Sea α la operación en los números reales definida (y denotada) por

$$a * b \equiv a + b + 2ab$$

(1) ¿Es α conmutativa? (2) ¿Es α asociativa? (3) Hallar el elemento neutro para α. (4) ¿Qué elementos, si los hay tienen simétricos y cuáles son?

OPERACIONES Y SUBCONJUNTOS

44. Sea $E = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, o sean los enteros pares. Decir si E es o no cerrado respecto de la operación de (1) adición, (2) sustracción, (3) multiplicación, (4) división (excepto por cero)

45. Sea $F = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$, o sea los números impares Decir si F es o no cerrado respecto de la operación de (1) adición, (2) sustracción, (3) multiplicación, (4) división (excepto por cero)

46. Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los conjuntos acotados de números reales. Decir si $\mathscr{B}$ es o no cerrado respecto de la operación de (1) unión, (2) intersección, (3) diferencia

47. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los intervalos abierto-cerrados $]a, b]$ junto con el conjunto vacío. Decir si $\mathscr{A}$ es o no cerrada respecto de la operación de (1) unión, (2) intersección, (3) diferencia.

48. Considérese la familia $\mathscr{A}$ de conjuntos de números reales que contienen al $\{0\}$, es decir, que $A \in \mathscr{A}$ si, y solamente si, $0 \in A$ Decir si $\mathscr{A}$ es o no cerrada respecto de la operación de (1) unión, (2) intersección, (3) diferencia.

Respuestas a los problemas propuestos

26. Tres: $i \circ f$, $j \circ g$ y $j \circ h \circ f$.

27. $t = s \circ f$, $r = u \circ s$, $r \circ f = u \circ s \circ f = u \circ t$, $w = v \circ u$, $w \circ s = v \circ r = v \circ u \circ s$, y $w \circ t = w \circ s \circ f = v \circ u \circ t = v \circ u \circ s \circ f = v \circ r \circ f$

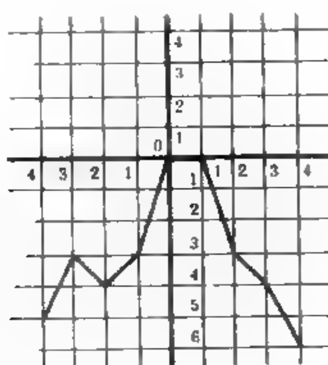
28. (1) $\{3, 2, 5\}$, (2) $\{3\}$, (3) $\{2, 1\}$

29. $f(\{a, b, c\}) = \{1, 3\}$, $f(\{a, b\}) = \{1, 3\}$, $f(\{a, c\}) = \{1\}$, $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(\{b, c\}) = \{1, 3\}$, $f(\{a\}) = \{1\}$, $f(\{b\}) = \{3\}$, $f(\{c\}) = \{1\}$

30. (1) $3f = \{(a, 6), (b, -9), (c, -3)\}$
(2) $g + 2 = \{(a, 0), (b, 2), (c, 3)\}$
(3) $f + g = \{(a, 0), (b, -3), (c, 0)\}$
(4) $2f - 5g = \{(a, 14), (b, -6), (c, -7)\}$
(5) $fg = \{(a, -4), (b, 0), (c, -1)\}$
(6) $|f| = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$
(7) $f^3 = \{(a, 8), (b, -27), (c, -1)\}$
(8) $|3f - fg| = \{(a, 10), (b, 9), (c, 2)\}$

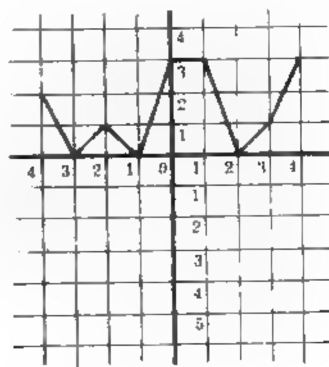
31. (1) $\{x \mid x \in R, x \neq 3\}$ (2) $\{x \mid x > 0\}$ (3) $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ (4) $\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$

32. (1)



$f - 3$

(2)



f

33. (1) $\chi_A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 0), (d, 0), (e, 1)\}$
(2) $\chi_B = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 1), (e, 0)\}$
(3) $\chi_C = \{(a, 1), (b, 0), (c, 0), (d, 1), (e, 1)\}$

34. (1) $\{a, d\}$, (2) $\{b\}$, (3) $\emptyset$, (4) $\{a, b, d\}$

35. O bien $A = \emptyset$, o bien $A = U$

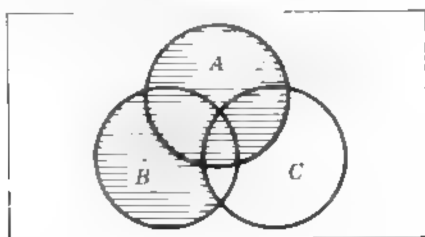
36. (1) $x = 5$, $y = 3$ (2) $x = 8$, $y = 4$ (3) $x = 8$, y puede ser cualquier elemento

37. O bien B es un subconjunto de A, o bien B es un subconjunto nulo del complemento de A

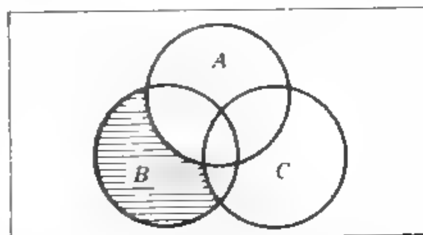
38. (1) No (2) Sí, (3) Sí

39. (1) Sí (2) Sí (3) U, el conjunto universal, es el elemento neutro (4) Solo U tiene simétrico, que es el mismo.

40. (1) No, (2) No
(3)



$A \cup (B - C)$ lo rayado



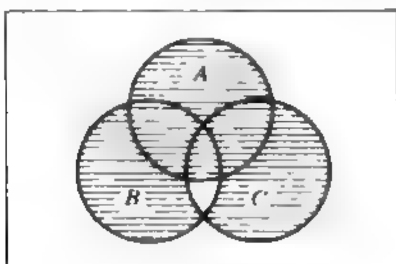
$(A \cup B) - (A \cup C)$ lo rayado

(4)

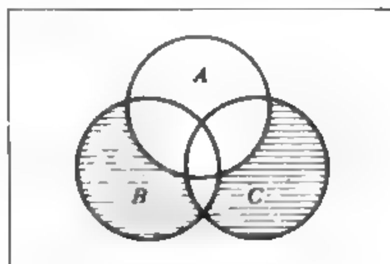
	Proposición	Razón
1.	$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$	1. Definicion de diferencia
2.	$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$	2. Ley de De Morgan
3.	$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$	3. Ley distributiva
4.	Pero $(A \cap B) \cap A' = (A \cap A') \cap B$	4. Ley asociativa, ley conmutativa
5.	$= \varnothing \cap B$	5. Ley del complemento
6.	$= \varnothing$	6. Ley de identidad
7.	$\therefore (A \cap B) - (A \cap C) = \varnothing \cup [(A \cap B) \cap C']$	7. Sustitucion
8.	$= (A \cap B) \cap C'$	8. Ley de identidad
9.	$= A \cap (B \cap C')$	9. Ley asociativa
10.	$= A \cap (B - C)$	10. Definicion de diferencia

41. (1) Si. (2) Si (3) $\varnothing$ es el elemento neutro. (4) El simetrico de todo conjunto es el mismo

(5)



$A \cup (B \Delta C)$ lo rayado



$(A \cup B) \Delta (A \cup C)$ lo rayado

(6)

	Proposición	Razón
1.	$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [(A \cap B) \cap (A \cap C)]$	1. Definicion
2.	Pero $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$	2. Ley distributiva
3.	$(A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C)$	3. Ley asociativa, Ley conmutativa
4.	$= A \cap (B \cap C)$	4. Ley de idempotencia
5.	$\therefore (A \cap B) \Delta (A \cap C) = [A \cap (B \cup C)] - [A \cap (B \cap C)]$	5. Sustitución
6.	$= A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)]$	6. Intersección distributiva con respecto a la diferencia
7.	$= A \cap (B \Delta C)$	7. Definición

42. (1) No (2) Si (3) El par ordenado (1, 0) es el elemento neutro (4) El par ordenado (a, b) tiene simetria si $a \neq 0$, que es $(1/a, -b/a)$.

43. (1) Si (2) Si (3) Cero es el elemento neutro. (4) Si $a \neq 1/2$, a tiene un simetrico, que es $-a/(1 + 2a)$.

44. (1) Si (2) Si (3) Si (4) No

45. (1) No (2) No (3) Si (4) No

46. (1) Si (2) Si (3) Si

47. (1) No (2) Si (3) Si

48. (1) Si (2) Si (3) No

Parte II: Cardinales, ordinales, inducción transfinita

Capítulo 9

Números cardinales

CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Parece natural preguntarse si dos conjuntos cualesquiera tienen o no el mismo número de elementos. Para el caso de los conjuntos finitos, basta contar los elementos de cada conjunto. Pero cuando se trata de conjuntos infinitos, la respuesta depende de lo que se entienda por conjuntos con el mismo número de elementos o, como se dirá en adelante, por conjuntos *equipotentes*. Antes se pensaba que todos los conjuntos infinitos eran equipotentes, pero la siguiente definición, atribuida al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), revolucionó por completo la teoría de conjuntos

Definición 9-1: El conjunto A es *equipotente* al conjunto B, lo que se denota por

$$A \sim B$$

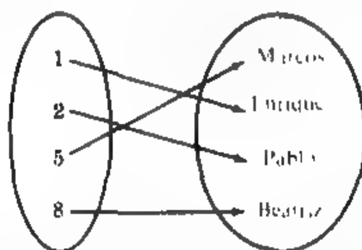
si existe una función

$$f: A \to B$$

inyectiva y sobreyectiva.

La función f define entonces lo que se llama una *correspondencia biunívoca* entre los conjuntos A y B.

Ejemplo 1-1: Sean $\mathcal{R} = \{1, 2, 5, 8\}$ y $T = \{$Marcos, Enrique, Pablo, Beatriz$\}$. El diagrama siguiente define una función de $\mathcal{R}$ en T que es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, $\mathcal{R}$ es equipotente a T



Ejemplo 1-2: Sean $M = \{1, 2, 3\}$ y $N = \{1, 2\}$. Ninguna de las posibles funciones de M en N es inyectiva y sobreyectiva. Así, pues, M no es equipotente a N

En vista de los dos ejemplos anteriores, no es difícil comprender que, en general, dos conjuntos finitos son equipotentes si contienen el mismo número de elementos, y solo entonces. Así, pues, para los conjuntos finitos, la Definición 9-1 corresponde al significado usual de tener dos conjuntos el mismo número de elementos

Ejemplo 1-3: Sean $G = [0, 1]$, $H = [2, 5]$ y $f: G \to H$ la función definida por

$$f(x) = 3x + 2$$

Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces $G \sim H$, o sea G es equivalente a H

Ejemplo 1-4: Sean $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. La función $f: N \to E$ definida por $f(x) = 2x$ es inyectiva y sobreyectiva Así que $N \sim E$

En el Ejemplo 1-4 resulta que el conjunto infinito N de los números naturales es equivalente a un subconjunto propio suyo, esto es característico de los conjuntos infinitos y de hecho queda establecida la siguiente

Definición 9-2: Un conjunto A es *infinito* si es equivalente a uno de sus subconjuntos propios. En caso contrario el conjunto es *finito*.

Ejemplo 1-5: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se tiene

$$A \sim A \times \{1\}$$
$$B \sim B \times \{2\}$$

pues las funciones

$$f: a \to (a, 1), \quad a \in A$$
$$g: b \to (b, 2), \quad b \in B$$

son ambas inyectivas y sobreyectivas. Por otra parte, aun no siendo A y B disjuntos, nótese que

$$A \times \{1\} \cap B \times \{2\} = \varnothing$$

pues cada par ordenado de $A \times \{1\}$ tiene 1 por segundo elemento y cada par ordenado de $B \times \{2\}$ tiene 2 por segundo elemento.

Se termina esta sección con un teorema que se utilizará después en el capítulo.

Teorema 9-1: La relación entre conjuntos definida por $A \sim B$ es una relación de equivalencia. En efecto,

(1) $A \sim A$ para todo conjunto.
(2) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$.
(3) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

CONJUNTOS ENUMERABLES

Sobre la base ya conocida de los números naturales, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definición 9-3: Si un conjunto D es equipotente al conjunto N de los números naturales, se llama *enumerable* y se dice que tiene cardinal $\aleph_0$ (alef cero).

Definición 9-4: Si un conjunto es finito también se dice *enumerable* por ser equipotente a un subconjunto de N. Si un conjunto es infinito y no es equipotente a N se dice *no enumerable*.

Ejemplo 2-1: Toda sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

de elementos distintos es enumerable, pues una sucesión es una función

$$f(n) = a_n$$

cuyo dominio de definición es N. Así que si los a_n son distintos, la función es inyectiva y sobreyectiva. Así, pues, los conjuntos siguientes son enumerables

$$\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$$
$$\{1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n-1}n, \ldots\}$$
$$\{(1, 1), (4, 8), (9, 27), \ldots, (n^2, n^3), \ldots\}$$

Ejemplo 2-2: Sea el conjunto producto $N \times N$ según se ve en la Figura 9-1.

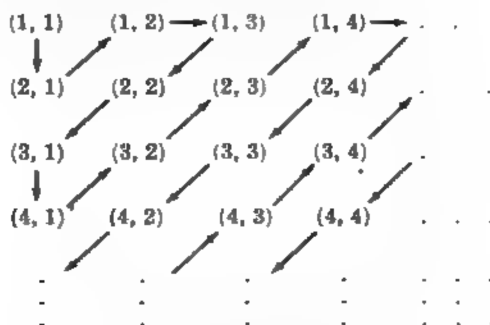


Fig. 9-1

El conjunto $N \times N$ puede escribirse como sucesión infinita de elementos distintos así:

$$\{(1, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), \ldots\}$$

(Se ve que la sucesión se establece «siguiendo las flechas» en la Fig. 9-1.) Así que, según lo dicho en el Ejemplo 2-1: $N \times N$ es enumerable.

Ejemplo 2-3: Sea $M = \{0, 1, 2, \ldots\} = N \cup \{0\}$. Ahora todo número natural $a \varepsilon N$ se puede escribir de una manera única en la forma

$$a = 2^r(2s + 1)$$

donde $r, s \varepsilon M$. La función $f: N \to M \times M$ definida por

$$f(a) = (r, s)$$

es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, $M \times M$ es enumerable. Nótese que $N \times N$ es un subconjunto de $M \times M$.

He aquí varios teoremas sobre conjuntos enumerables.

Teorema 9-2: Todo conjunto infinito contiene algún subconjunto enumerable.

Teorema 9-3: Un subconjunto de un conjunto enumerable, o bien es enumerable, o bien es finito, y entonces, por extensión, se dice también enumerable (se pueden contar sus elementos, esto es, enumerarlos).

Teorema 9-4: Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una familia enumerable de conjuntos enumerables disjuntos dos a dos. La unión de los conjuntos

$$\bigcup_{i \varepsilon N} A_i$$

es enumerable.

El siguiente ejemplo de un conjunto enumerable es de gran importancia; su carácter de enumerable no es tan claro como parece.

Ejemplo 2-4: Sea Q^+ el conjunto de los números racionales positivos y sea Q^- el conjunto de los números racionales negativos. Entonces

$$Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$$

es el conjunto de todos los racionales.

Sea la función $f: Q^+ \to N \times N$ definida así:

$$f(p/q) = (p, q)$$

siendo p/q un elemento cualquiera de Q^+ expresado como cociente de dos enteros positivos primos entre sí. Es inmediato que f es inyectiva y que, por tanto, Q^+ es equipotente a un subconjunto de $N \times N$. Por el Teorema 9-3 y el Ejemplo 2-2, Q^+ es enumerable. Asimismo, resulta que Q^- es enumerable. Por consiguiente, el conjunto de los números racionales, que es la unión de Q^+, $\{0\}$ y Q^-, es enumerable.

EL CONTINUO

No todo conjunto infinito es enumerable. El siguiente teorema presenta un ejemplo particular de extrema importancia.

Teorema 9-5: El intervalo unidad $[0, 1]$ no es enumerable.

Se dan dos demostraciones de este teorema en la sección de problemas resueltos.

Definición 9-5: Sea un conjunto A equipotente al intervalo $[0, 1]$. Se dice que A tiene la *potencia del continuo* y que su cardinal es c.

Ejemplo 3-1: Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y sea

$$f: [0, 1] \to [a, b]$$

la función definida por

$$f(x) = a + (b - a)x$$

Se ve que f es inyectiva y sobreyectiva. Así que $[a, b]$ tiene cardinal c. Se demostrará, además, que todo intervalo, abierto o semiabierto, tiene también cardinal c.

Ejemplo 3-2: La función $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$, es inyectiva y sobreyectiva, así que

$$R \sim (-\pi/2, \pi/2)$$

Por tanto, el conjunto de los números reales tiene la potencia del continuo, es decir, su cardinal es $\mathfrak{c}$

NUMEROS CARDINALES

Teniendo en cuenta que, según el Teorema 9-1, la relación definida entre conjuntos por

$$A \sim B$$

es una relación de equivalencia, resulta, según el teorema fundamental sobre relaciones de equivalencia, una partición de todos los conjuntos en clases de equivalencia, que son clases disjuntas de conjuntos equipotentes

Definición 9-6: Dado un conjunto cualquiera A, la familia α de los conjuntos equipotentes a A se llama ***número cardinal* de A** (o, simplemente, cardinal de A) y se denota por

$$\alpha = \#(A)$$

Definición 9-7: El número cardinal de cada uno de los conjuntos

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots$$

se denota por 0, 1, 2, 3, . . . , respectivamente, y se dice un *cardinal finito*.

Definición 9-8: El número cardinal de N, el conjunto de los números naturales, y el numero cardinal del intervalo unidad $[0, 1]$, se simbolizan respectivamente por

$$\#(N) = \aleph_0, \qquad \#([0, 1]) = \mathfrak{c}$$

Observación 9-1: El símbolo $\aleph_0$ (alef cero) fue introducido por Cantor; también suele escribirse $\mathfrak{a}$ (a gótica) en vez de $\aleph_0$.

ARITMETICA CARDINAL

En vista de la Definición 9-7, los números cardinales pueden considerarse como superconjuntos de los cardinales finitos

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

o sea de los números naturales N y 0. La definición que sigue generaliza en esencia las operaciones ordinarias de adición y multiplicación de números naturales a todos los números cardinales

Definición 9-9: Sean α y β números cardinales y sean A y B dos conjuntos disjuntos tales que

$$\alpha = \#(A), \quad \beta = \#(B)$$

Entonces

$$\alpha + \beta = \#(A \cup B)$$
$$\alpha\beta = \#(A \times B)$$

Teorema 9-6: La Definición 9-9 es una buena definición, es decir, que la definicion de $\alpha + \beta$ y de $\alpha\beta$ no dependen de los conjuntos particulares A y B. Esto es, si

$$A \sim A', \; B \sim B', \; A \cap B = \emptyset, \; A' \cap B' = \emptyset$$

entonces

$$\#(A \cup B) = \#(A' \cup B')$$
$$\#(A \times B) = \#(A' \times B')$$

En la Definición 9-9 se supone que los conjuntos A y B son disjuntos. Como los conjuntos $A \times \{1\}$ y $B \times \{2\}$ son disjuntos en todo caso, sean cuales fueren A y B, puede sustituirse la Definición 9-9 por la siguiente:

Definición 9-9': Dados $\alpha = \#(A)$ y $\beta = \#(B)$, es

$$\alpha + \beta = \#(A \times \{1\} \cup B \times \{2\})$$
$$\alpha\beta = \#(A \times B)$$

Ejemplo 4-1: Como $3 = \#(\{a, b, c\})$ y $4 = \#(\{1, 3, 5, 7\})$, entonces

$$3 + 4 = \#(\{a, b, c, 1, 3, 5, 7\}) = 7$$
$$(3)(4) = \#(\{a, b, c\} \times \{1, 3, 5, 7\}) = 12$$

O sea, las operaciones de adición y multiplicación de cardinales finitos corresponden a las operaciones ordinarias de adición y multiplicación de números naturales

Ejemplo 4-2: Siendo $\aleph_0 = \#(\{1, 3, 5, \ldots\}) = \#(\{2, 4, 6, \ldots\})$, se tiene que

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \#(N) = \aleph_0 \quad \text{y} \quad \aleph_0\aleph_0 = \#(N \times N) = \aleph_0$$

Teorema 9-7: Las operaciones de adición y multiplicación de cardinales es asociativa y conmutativa, y la multiplicación es distributiva respecto de la adición, es decir, que para cardinales cualesquiera α, β y γ,

$$(1)\quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
$$(2)\quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$
$$(3)\quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$(4)\quad \alpha\beta = \beta\alpha$$
$$(5)\quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

No todas las propiedades de la adición y de la multiplicación de números naturales son válidas para los cardinales en general. Por ejemplo, para los numeros naturales se verifica la ley de cancelación, o sea que

$$a + b = a + c \quad \text{implica } b = c$$
$$ab = ac \quad \text{implica } b = c$$

Pues, por el Ejemplo 4-2,

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = 1 + \aleph_0 \quad \text{no implica } \aleph_0 = 1$$
$$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0 = 1\aleph_0 \quad \text{no implica } \aleph_0 = 1$$

se ve que la ley de cancelación no es cierta para las operaciones de adición y multiplicación de cardinales.

Observación 9-2: Tambien se pueden introducir exponentes en la aritmética de los cardinales, como sigue: Sean $\alpha = \#(A)$ y $\beta = \#(B)$, y denótese por

$$B^A$$

la familia de todas las funciones de A (el exponente) en B Entonces

$$\beta^\alpha \equiv \#(B^A)$$

En efecto, las leyes siguientes de los exponentes, válidas para los números naturales, también lo son para cardinales cualesquiera, α, β y γ:

$$(1)\quad \alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$
$$(2)\quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$
$$(3)\quad (\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$$

Ejemplo 4-3: Dados $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, se tiene $\#(A) = 3$, $\#(B) = 2$ y $2^3 = \#(B^A)$ Pero en B^A hay exactamente 8 funciones:

$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$, $\{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$, $\{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$, $\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
$\{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$, $\{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$, $\{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$, $\{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$

Por tanto, se verifica entre los cardinales,

$$2^3 = 8$$

Es decir, que si m y n son cardinales finitos m^n denota el mismo número, sean m y n numeros naturales o cardinales.

DESIGUALDADES Y NUMEROS CARDINALES

Una relación de desigualdad se define como sigue entre cardinales:

Definición 9-10: Sean $\alpha = \#(A)$ y $\beta = \#(B)$. Suponiendo además que A es equipotente a un subconjunto de B, es decir, que hay una función $f: A \to B$ inyectiva, entonces se escribe

$$A \precsim B$$

que se lee «A es anterior a B», y

$$\alpha \leq \beta$$

que se lee «α es menor o igual que β».

Se emplea, además, la notación siguiente:

$A \prec B$ significa $A \precsim B$ y $A \not\approx B$
$\alpha < \beta$ significa $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$

Ejemplo 5-1: Dados A y B finitos, sean $n = \#(A)$ y $m = \#(B)$. Entonces $n \leq m$ como cardinales si, y solo si, $n \leq m$ como números naturales. Es decir, que la relación de desigualdad en el conjunto de los números cardinales es una extensión de la relación de desigualdad en el conjunto de los números naturales.

Ejemplo 5-2: Puesto que N, el conjunto de los números naturales, es un subconjunto de R, el de los números reales,

$$\aleph_0 \leq c$$

Y puesto que R no es enumerable, se tiene $\aleph_0 \neq c$,

$$\aleph_0 < c$$

Ejemplo 5-3: La función idéntica $1_A : A \to A$ es inyectiva sobre cualquier conjunto A, así que $A \precsim A$ y entonces $\alpha \leq \alpha$ para cualquier cardinal α.

Ejemplo 5-4: Si $f: A \to B$ es inyectiva y $g: B \to C$ es inyectiva, la función producto de composición $(g \circ f): A \to C$ también es inyectiva. De modo que

$$A \precsim B \quad \text{y} \quad B \precsim C \quad \text{implica} \quad A \precsim C$$

y para cardinales cualesquiera α, β y γ,

$$\alpha \leq \beta \quad \text{y} \quad \beta \leq \gamma \quad \text{implica} \quad \alpha \leq \gamma$$

Por lo visto en los dos ejemplos anteriores, el siguiente teorema es cierto.

Teorema 9-8: La relación entre conjuntos definida por $A \precsim B$ es reflexiva y transitiva; y la relación entre cardinales definida por $\alpha \leq \beta$ es también reflexiva y transitiva

TEOREMA DE CANTOR

Los únicos cardinales infinitos vistos hasta ahora son $\aleph_0$ y c. Parece natural preguntarse si no habrá otros; y la respuesta es afirmativa. En efecto, el teorema de Cantor, que se expone a continuación, dice que dado cualquier cardinal α existe un cardinal mayor que α.

Teorema 9-9 (teorema de Cantor): Para todo conjunto A,

$$A \prec 2^A$$

y, por consiguiente, para todo cardinal α,

$$\alpha < 2^\alpha$$

siendo así que si $\alpha = \#(A)$, $2^\alpha = \#(2^A)$, número cardinal de la familia de subconjuntos de A.

TEOREMA DE SCHRÖDER-BERSTEIN

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, se verifica una de las siguientes relaciones por lo menos

(1) A es equipotente a B, esto es,

$$\#(A) = \#(B)$$

(2) A no es equipotente a B, pero A es equipotente a un subconjunto de B (o viceversa), esto es,

$$\#(A) < \#(B) \quad (\text{o} \quad \#(B) < \#(A))$$

(3) A es equipotente a un subconjunto de B y B es equipotente a un subconjunto de A, esto es,

$$\#(A) \leq \#(B) \quad \text{y} \quad \#(B) \leq \#(A)$$

(4) A no es equipotente a un subconjunto de B y B no es equipotente a un subconjunto de A, esto es,

$$\#(A) \nleq \#(B), \quad \#(A) \neq \#(B) \quad \text{y} \quad \#(A) \ngeq \#(B)$$

El célebre teorema de Schröder-Bernstein establece que, en el caso (3), A es equipotente a B, es decir, que $\#(A) = \#(B)$.

Teorema 9-10 (Schröder-Bernstein): Si $A \precsim B$ y $B \precsim A$, entonces $A \sim B$, así, pues, para cardinales α y β cualesquiera,

$$\alpha \leq \beta \text{ y } \beta \leq \alpha \quad \text{implica } \alpha = \beta$$

El teorema de Schröder-Bernstein se puede enunciar de la manera equivalente que sigue:

Teorema 9-10′: Dados $X \supset Y \supset X_1$, y si $X \sim X_1$, entonces $X \sim Y$.

Para concluir este capítulo, se enuncia la imposibilidad del caso (4) por el

Teorema 9-11 (ley de tricotomía): Para verificar cualquier par de números cardinales α y β

$$\text{o bien } \alpha < \beta, \text{ o bien } \alpha = \beta, \text{ o bien } \alpha > \beta$$

La demostración de este último teorema requiere procedimientos de inducción transfinita, los cuales se tratarán en el Capítulo 12, de ahí que la demostración se posponga hasta entonces.

HIPOTESIS DEL CONTINUO

Por el teorema de Cantor, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y como ya se ha visto, $\aleph_0 < c$. El teorema siguiente expresa la relación entre $2^{\aleph_0}$ y c.

Teorema 9-12: $2^{\aleph_0} = c$

Ocurre preguntar si existirá un cardinal β comprendido «entre» $\aleph_0$ y c. Desde un principio, Cantor sostuvo la conjetura, conocida por hipótesis del continuo, de que la respuesta a tal pregunta es negativa. O sea, pues,

Hipótesis del continuo: No existe cardinal β tal que $\aleph_0 < \beta < c$

En 1963 se demostró que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos, de cierta manera en el mismo sentido en que el postulado quinto de Euclides sobre las rectas paralelas es independiente de los otros axiomas de la geometría.

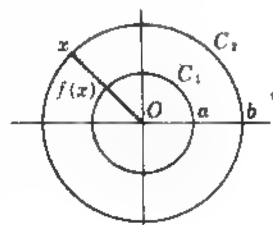
Problemas resueltos

CONJUNTOS EQUIPOTENTES, CONJUNTOS ENUMERABLES, EL CONTINUO

1. Sean los círculos concéntricos

$$C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\}, \qquad C_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = b^2\}$$

con $0 < a < b$ por ejemplo. Establecer geométricamente una correspondencia biunívoca entre C_1 y C_2.



Solución:

Sea $x \in C_2$. Sea la función $f: C_2 \to C_1$ donde $f(x)$ es el punto de intersección del radio que va del centro a x, con C_1, como se ve en el diagrama adyacente.

Resulta que f es inyectiva y sobreyectiva, así que define una correspondencia biunívoca entre C_1 y C_2.

2. Demostrar: (*a*) $[0, 1] \sim]0, 1[$, (*b*) $[0, 1] \sim [0, 1[$, (*c*) $[0, 1] \sim]0, 1]$.

Solución:

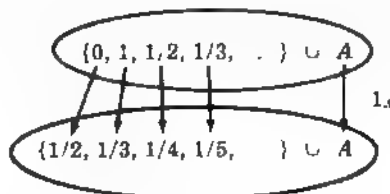
(*a*) Nótese que

$$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A$$
$$]0, 1[= \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A$$

donde

$$A = [0, 1] - \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} =]0, 1[- \{1/2, 1/3, \ldots\}$$

Considérese la función $f: [0, 1] \to]0, 1[$ definida por el diagrama siguiente



Es decir

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/(n+2) & \text{si } x = 1/n, \ n \in N \\ x & \text{si } x \neq 0, 1/n, \ n \in N \end{cases}$$

Esta función es inyectiva y sobreyectiva. En consecuencia, $[0, 1] \sim]0, 1[$.

(*b*) La función $f: [0, 1] \to [0, 1[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } x = 1/n, \ n \in N \\ x & \text{si } x \neq 1/n, \ n \in N \end{cases}$$

es inyectiva y sobreyectiva. [Es análoga a la función de la parte (*a*).] Así que $[0, 1] \sim [0, 1[$.

(*c*) Sea $f: [0, 1[\to]0, 1]$ la función definida por $f(x) = 1 - x$. Entonces f es inyectiva y sobreyectiva y, por tanto, $[0, 1[\sim]0, 1]$. En vista de (*b*) y del Teorema 9-1, $[0, 1] \sim]0, 1]$.

3. Demostrar que cada uno de los intervalos siguientes tiene la potencia del continuo, esto es, que tiene cardinal $\mathfrak{c}$: (1) $[a, b]$, (2) $]a, b[$, (3) $[a, b[$, (4) $]a, b]$, siendo $a < b$.

Solución:

La fórmula $f(x) = a + (b - a)x$ define cada una de las funciones

$$[0, 1] \xrightarrow{f} [a, b] \quad [0, 1[\xrightarrow{f} [a, b[\quad]0, 1[\xrightarrow{f}]a, b[\quad]0, 1] \xrightarrow{f}]a, b]$$

Cada función es inyectiva y sobreyectiva. Por consiguiente, según el Problema 2 y el Teorema 9-1, cada intervalo es equipotente a $[0, 1]$, esto es, tiene la potencia del continuo.

4. Demostrar el Teorema 9-1: La relación de equipotencia $A \sim B$ entre conjuntos es una relación de equivalencia. Es decir, demostrar que

(1) $A \sim A$ para todo conjunto,
(2) Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$,
(3) Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Solución:

(1) La función idéntica $1_A : A \to A$ es inyectiva y sobreyectiva; por tanto, $A \sim A$.

(2) Si $A \sim B$, existe entonces una función $f: A \to B$ inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, f tiene una función recíproca $f^{-1} : B \to A$ que también es inyectiva y sobreyectiva. Así, pues,

$$A \sim B \quad \text{implica} \quad B \sim A$$

(3) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, existen entonces funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$ inyectivas y sobreyectivas. Entonces la función producto de composición $g \circ f: A \to C$ también es inyectiva y sobreyectiva y, por consiguiente,

$$A \sim B \text{ y } B \sim C \quad \text{implican} \quad A \sim C$$

5. Demostrar el Teorema 9-2: Todo conjunto infinito A contiene algún subconjunto D que es enumerable

Solución:

Sea $f: 2^A \to A$ una función de elección. Dada la sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= f(A) \\ a_2 &= f(A - \{a_1\}) \\ a_3 &= f(A - \{a_1, a_2\}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= f(A - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

puesto que A es infinito $A - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ no es vacío para cualquier $n \in N$. Además, puesto que f es una función de elección

$$a_n \neq a_i \quad \text{donde } i < n$$

Así, pues, los a_n son distintos y, por consiguiente, $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ es enumerable

En esencia, la función de elección f «elige» un elemento $a_1 \in A$, después un elemento a_2 entre los elementos que «quedan» en A, etc. Como A es infinito, el conjunto de elementos que «quedan» en A es no vacío.

6. Demostrar que para cualesquiera conjuntos A y B, se tiene $A \times B \sim B \times A$.

Solución:

La función $f: A \times B \to B \times A$ definida por

$$f((a, b)) = (b, a), \qquad (a \in A, b \in B)$$

es inyectiva y sobreyectiva; por tanto, $A \times B \sim B \times A$.

7. Demostrar que para cualesquiera conjuntos A, B y C

$$(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$$

Solución:

La función $f: (A \times B) \times C \to A \times B \times C$ definida por

$$f((a, b), c) = (a, b, c), \qquad (a \in A, b \in B, c \in C)$$

es inyectiva y sobreyectiva; por consiguiente, $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C$. De igual modo, $A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$. Así que entonces

$$(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$$

8. Demostrar: Si X es un conjunto cualquiera y $C(X)$ es la familia de funciones características de X, esto es, la familia de funciones $f: X \to \{1, 0\}$, entonces la familia de subconjuntos de X es equipotente a $C(X)$, es decir, $2^X \sim C(X)$.

Solución:

Sea A un subconjunto de X, esto es, $A \in 2^X$. Sea $f: 2^X \to C(X)$ definida por

$$f(A) = \chi_A$$

o sea que f aplica cada subconjunto A de X en χ_A, la función característica de A (con respecto a X). Entonces f es inyectiva y, como antes se vio, sobreyectiva. Por tanto, $2^X \sim C(X)$.

9. Demostrar el Teorema 9-3: Un subconjunto de un conjunto enumerable es finito o es enumerable.

Solución:

Sea

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\} \qquad (1)$$

un conjunto enumerable y sea B un subconjunto de A. Si $B = \emptyset$, entonces es B finito. Si $B \neq \emptyset$, sea a_{n_1} el primer elemento de la sucesión (1) tal que $a_{n_1} \in B$; sea a_{n_2} el primer elemento que sigue a a_{n_1} en la sucesión (1) tal que $a_{n_2} \in B$; etc. Entonces

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$$

Si el conjunto de enteros $\{n_1, n_2, \ldots\}$ es acotado, entonces B es finito. Si no, B es enumerable.

10. Demostrar el Teorema 9-5: El intervalo unidad $A = [0, 1]$ no es enumerable.

Solución:

Método 1. Supóngase lo contrario; o sea que

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

es decir, que A se puede escribir como sucesión.

Cada elemento de A se puede escribir en forma de decimal con infinitas cifras, como sigue

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \ldots \\ x_2 & = & 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \ldots \\ x_3 & = & 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \ldots \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & = & 0.\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots \end{array} \qquad (1)$$

donde $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ y donde cada decimal tiene un número infinito de elementos no nulos. Así, pues, se escribe 1 como $0{,}999\ldots$ y, para aquellos números que se pueden escribir en forma decimal de dos maneras, como por ejemplo,

$$1/2 = 0{,}5000\ldots = 0{,}4999\ldots$$

(en una de ellas hay infinitos nueves y en la otra todas las cifras son ceros, con excepción de un número finito de ellas) escríbase el decimal que tiene los nueves.

Construyendo ahora el número real

$$y = 0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$$

que pertenecerá a A, de la siguiente manera: tomar b_1 de manera que $b_1 \neq a_{11}$, y $b_1 \neq 0$; tomar b_2 de modo que $b_2 \neq a_{22}$ y $b_2 \neq 0$, etc., resulta que $y \neq x_1$ pues $b_1 \neq a_{11}$ (y $b_1 \neq 0$), $y \neq x_2$, pues $b_2 \neq a_{22}$ (y $b_2 \neq 0$), etc.; esto es, resulta que $y \neq x_n$ para todo $n \in N$, por consiguiente, $y \notin A$, lo que se contradice con $y \in A$. Así que la suposición de que A es enumerable lleva a una contradicción. Por consiguiente, no es enumerable.

Método 2. (En esta segunda demostración del Teorema 9-5, se utiliza la siguiente propiedad de los números reales. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ... una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ Hay entonces un número real y que pertenece a todos los intervalos.)

Suponiendo lo contrario, o sea, como antes

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

constrúyase una sucesión de intervalos cerrados $I_1, I_2, \ldots$ de la manera siguiente: Sean los tres subintervalos cerrados de $[0,1]$

$$[0, 1/3], \quad [1/3, 2/3], \quad [2/3, 1] \qquad (1)$$

cada uno de los cuales tiene longitud $\frac{1}{3}$. Ahora bien, x_1 no puede estar en los tres intervalos. (Si x_1 es uno de los extremos, podría estar en dos de los intervalos.) Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de los intervalos en (1) tal que $x_1 \notin I_1$.

Tomando ahora los tres subintervalos cerrados de $I_1 = [a_1, b_1]$,

$$[a_1, a_1 + 1/9], \quad [a_1 + 1/9, a_1 + 2/9], \quad [a_1 + 2/9, b_1] \qquad (2)$$

cada uno de longitud $\frac{1}{9}$, igual que antes, sea I_2 uno de los intervalos en (2) tal que $x_2 \notin I_2$. Continuando de esta manera, resulta una sucesión de intervalos cerrados

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \qquad (3)$$

caracterizada porque $x_n \notin I_n$ para todo $n \in N$.

Según la citada propiedad de los números reales, hay un número real $y \in [0, 1]$ tal que y pertenece a todos los intervalos de (3). Pero como

$$y \in A = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

$y = x_m$ para algún $m \in N$. Pero por la construcción que se hizo, $y = x_m \notin I_m$, lo cual está en contradicción con el pertenecer y a todos los intervalos de (3). Así, pues, la suposición de que A es enumerable, ha llevado a una contradicción. Por consiguiente, A no es enumerable.

NUMEROS CARDINALES Y ARITMETICA CARDINAL

11. Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 conjuntos cualesquiera. Definir conjuntos B_1, B_2, B_3 y B_4 tales que

$$\#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) + \#(A_4) = \#(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)$$

Solución:

Sea $B_1 = A_1 \times \{1\}$, $B_2 = A_2 \times \{2\}$, $B_3 = A_3 \times \{3\}$ y $B_4 = A_4 \times \{4\}$. Entonces $B_i \sim A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, y $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Y, por tanto, resulta lo propuesto.

12. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Definir una familia de conjuntos $\{B_i\}_{i \in I}$ tal que

$$B_i \sim A_i,\ i \in I \text{ y } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

Solución:

Sea $B_i = A_i \times \{i\}$, $i \in I$. La familia $\{B_i\}_{i \in I}$ tiene las propiedades que se piden.

13. Demostrar el Teorema 9-7: Para cualesquiera cardinales α, β y γ,

$$\begin{array}{ll} (1) & (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \\ (2) & (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \\ (3) & \alpha + \beta = \beta + \alpha \\ (4) & \alpha\beta = \beta\alpha \\ (5) & \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \end{array}$$

Solución:

Sean A, B y C conjuntos disjuntos dos a dos tales que $\alpha = \#(A)$, $\beta = \#(B)$ y $\gamma = \#(C)$.

(1)
$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \#(A \cup B) + \#(C) = \#((A \cup B) \cup C) \\ \alpha + (\beta + \gamma) &= \#A + \#(B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) \end{aligned}$$

Como la unión de conjuntos es asociativa, esto es, como $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ entonces

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

(2)
$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= \#(A \times B)\,\#(C) = \#((A \times B) \times C) \\ \alpha(\beta\gamma) &= \#A\,\#(B \times C) = \#(A \times (B \times C)) \end{aligned}$$

Por el Problema 7 se sabe que $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$. Por consiguiente, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(3) $\alpha + \beta = \#(A \cup B) = \#(B \cup A) = \beta + \alpha$, pues $A \cup B = B \cup A$.

(4) Nótese que $\alpha\beta = \#(A \times B)$ y $\beta\alpha = \#(B \times A)$. Por el Problema 6, $A \times B \sim B \times A$, así que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(5) Observar primero que $B \cap C = \emptyset$ implica $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + \gamma) &= \#(A) \cdot \#(B \cup C) = \#(A \times (B \cup C)) \\ \alpha\beta + \alpha\gamma &= \#(A \times B) + \#(A \times C) = \#((A \times B) \cup (A \times C)) \end{aligned}$$

Pero $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Luego $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

14. Demostrar: $\aleph_0 c = c$.

Solución:

Sean $Z = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ y $A = [0, 1[$. La función $f: Z \times A \to R$ definida por

$$f(i, a) = i + a$$

que aplica, pues, $f(\{i\} \times [0, 1[)$ sobre $[i, i + 1[$ es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto,

$$(Z \times A) \sim R$$

Como $\#(Z) = \aleph_0$, $\#(A) = c$ y $\#(R) = c$, es $\aleph_0 c = c$.

15. Demostrar que si β es un cardinal infinito, entonces

$$\aleph_0 + \beta = \beta$$

Solución:

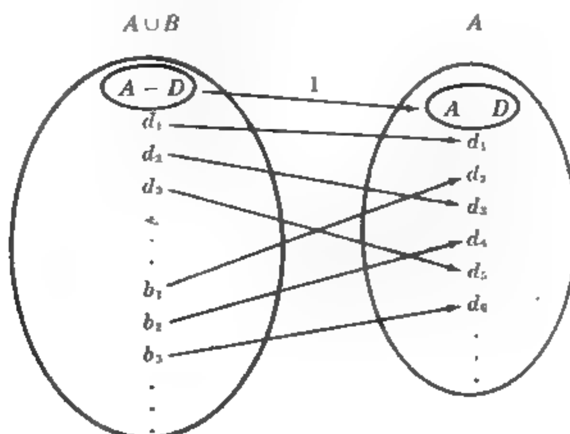
Sea A un conjunto infinito, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ enumerable y $A \cap B = \varnothing$. El teorema será cierto si se demuestra que

$$A \cup B \sim A$$

Como A es infinito, A contiene un subconjunto enumerable

$$D = \{d_1, d_2, \ldots\}$$

Sea $f: A \cup B \to A$ definida por el siguiente diagrama



Es decir, la $f: A \cup B \to A$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A - D \\ d_{2n-1} & \text{si } x = d_n \\ d_{2n} & \text{si } x = b_n \end{cases}$$

Entonces f es inyectiva y sobreyectiva. En consecuencia, $A \cup B \sim A$, como afirma el teorema

DESIGUALDADES Y NUMEROS CARDINALES

16. Demostrar el teorema de Cantor: Para todo conjunto A, $A \prec 2^A$ y, por tanto, $\#(A) < \#(2^A)$.

Solución:

La función $g: A \to 2^A$ que aplica cada elemento $a \in A$ en el conjunto formado por a solo, esto es, la definida por $g(a) = \{a\}$, es inyectiva; por tanto, $A \precsim 2^A$.

Si se demuestra ahora que A no es equipotente a 2^A, queda establecido el teorema. Suponiendo lo contrario, o sea que exista una función $f: A \to 2^A$ inyectiva y sobreyectiva, sea $a \in A$ un elemento que llamaremos «malo» si a no pertenece al conjunto que es su imagen, es decir, que $a \notin f(a)$, y sea B el conjunto de elementos «malos».

$$B = \{x \mid x \in A,\ x \notin f(x)\}$$

Se ve que B es un subconjunto de A, esto es, $B \in 2^A$. Por tanto, como $f: A \to 2^A$ es sobreyectiva, existe un elemento $b \in A$ tal que $f(b) = B$. ¿Es b «malo» o no? Si $b \in B$, entonces, por la definición de B, $b \notin f(b) = B$, que es imposible. De igual manera, si $b \notin B$, entonces $b \in f(b) = B$, que también es imposible. Así, pues, la suposición del principio de que $A \sim 2^A$, ha llevado a una contradicción. Por consiguiente, la suposición es falsa y el teorema es cierto.

17. Demostrar el teorema de Schröder-Bernstein: Si $X \supset Y \supset X_1$ y $X \sim X_1$, entonces $X \sim Y$.

Solución:

Como $X \sim X_1$, existe una función $f: X \to X_1$ inyectiva y sobreyectiva. Por otra parte, como $X \supset Y$, la restricción de f a Y, que también se denotará por f, es asimismo inyectiva; por tanto, Y es equipotente a un subconjunto de X_1, esto es, $Y \sim Y_1$, donde

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1$$

y $f: Y \to Y_1$ es inyectiva y sobreyectiva. Pero ahora $X_1 \subset Y_1$ por parecida razón, $X_1 \sim X_2$ donde

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2$$

y $f: X_1 \to X_2$ es inyectiva y sobreyectiva. En consecuencia, hay conjuntos equipotentes $X, X_1, X_2, \ldots$ y conjuntos equipotentes $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ tales que

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset Y_2 \supset \cdots$$

Sea

$$B = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \cdots$$

Entonces

$$X = (X - Y) \cup (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup \cdots \cup B$$
$$Y = (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup (Y_1 - X_2) \cup \cdots \cup B$$

Nótese, además, que

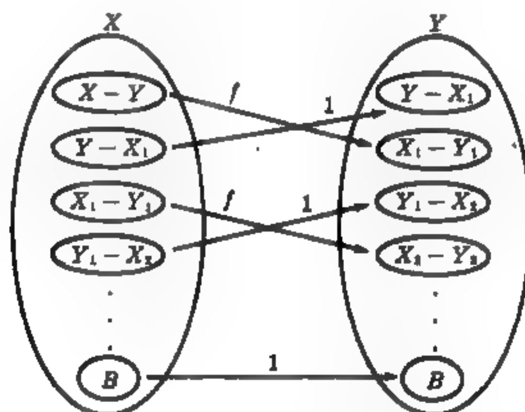
$$(X - Y) \sim (X_1 - Y_1) \sim (X_2 - Y_2) \sim \cdots$$

En particular, la función

$$f: (X_n - Y_n) \to (X_{n+1} - Y_{n+1})$$

es inyectiva y sobreyectiva.

Sea la función $g: X \to Y$ definida por el diagrama:



O expresado de otra manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X_i - Y_i \quad \text{o} \quad x \in X - Y \\ x & \text{si} \quad x \in Y_i - X_i \quad \text{ó} \quad x \in B \end{cases}$$

g resulta ser inyectiva y sobreyectiva. Por consiguiente, $X \sim Y$.

18. Demostrar el Teorema 9-12: $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Solución:

Sea R el conjunto de los números reales y sea 2^Q la familia de subconjuntos de Q, el conjunto de los números racionales. Sea, además, la función $f: R \to 2^Q$ definida por

$$f(a) = \{x \mid x \in Q, \ x < a\}$$

o sea que f aplica cada número real a en el conjunto de los números racionales menores que a. Se demuestra que f es inyectiva: Sean $a, b \in R$, $a \neq b$ con $a < b$, por ejemplo. Por una propiedad de los números reales, existe un número racional r tal que

$$a < r < b$$

Entonces $r \in f(b)$ y $r \notin f(a)$; se sigue que $f(b) \neq f(a)$ lo que quiere decir que f es inyectiva. Así que $R \precsim 2^Q$ y como $\#(R) = \mathfrak{c}$ y $\#(Q) = \aleph_0$,

$$\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$$

Sea ahora $C(N)$ la familia de funciones características $f: N \to \{0, 1\}$ la cual, como se demostró en el Problema 8, es equipotente a 2^N, siendo N el conjunto de los números naturales. Considerando la función $F: C(N) \to [0, 1]$ definida por

$$F(f) = 0, f(1)\, f(2)\, f(3) \ldots$$

que es un decimal con infinitos ceros y unos, si $f, g \in C(N)$ y $f \neq g$, entonces $F(f) \neq F(g)$, pues los decimales serían distintos; así que F es inyectiva. Por consiguiente, $2^N \sim C(N) \precsim [0, 1]$ y entonces

$$2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$$

Y, por tanto,

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

19. Demostrar: El conjunto P de todos los polinomios

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \qquad (1)$$

con coeficientes enteros, es decir, con $a_0, a_1, \ldots, a_m$ enteros, es enumerable.

Solución:

Para todo par de números naturales (n, m), sea $P_{(n,m)}$ el conjunto de polinomios de (1) de grado m para los cuales

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| \quad = \quad n$$

Es claro que $P_{(n,m)}$ es finito. Por tanto,

$$P \; = \; \cup_{i \in N \times N} P_i$$

es enumerable, pues es una familia enumerable de conjuntos enumerables. No siendo P finito, es, por consiguiente, enumerable.

20. Un número real r se llama *número algebraico* si r es solución de una ecuación polinómica

$$p(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad = \quad 0$$

con coeficientes enteros. Demostrar que el conjunto A de los números algebraicos es enumerable.

Solución:

Por el precedente problema, es evidente que el conjunto E de las ecuaciones polinómicas es enumerable:

$$E \quad = \quad \{p_1(x) = 0, \; p_2(x) = 0, \; p_3(x) = 0, \; \ldots\}$$

Definido

$$A_i = \{x \mid x \text{ es una solución de } p_i(x) = 0\}$$

puesto que un polinomio de grado n puede tener a lo más n raíces, todo A_i es finito. Por consiguiente,

$$A \; = \; \cup_{i \in N} A_i$$

es una familia enumerable de conjuntos enumerables. Así, pues, A es enumerable si no es finito.

Problemas propuestos

CONJUNTOS EQUIPOTENTES, CONJUNTOS ENUMERABLES, EL CONTINUO

21. Los enteros, Z, se pueden poner en correspondencia biunívoca con N, los números naturales, como sigue

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \end{array}$$

Hallar una fórmula que defina una función $f: N \to Z$ que exprese esta correspondencia entre N y Z.

22. $N \times N$ se escribió como sucesión considerando el diagrama de la Fig. 9-1. No es esta la única manera de escribir en sucesión $N \times N$. Escríbase $N \times N$ como sucesión de otras dos maneras distintas, haciendo diagramas apropiados.

23. Demostrar el Teorema 9-4. Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una familia enumerable de conjuntos disjuntos dos a dos, cada uno enumerable. La unión de los conjuntos $\cup_{i \in N} A_i$ es enumerable.

24. Demostrar que si A y B son enumerables, $A \times B$ también es enumerable.

25. Demostrar que el conjunto de puntos del plano que tiene coordenadas racionales es enumerable.

26. Sea $\{T_i\}_{i \in I}$ una familia de intervalos disjuntos dos a dos. Demostrar que la familia es enumerable.

27. Se dice que un número real x es trascendente si no es algebraico, es decir, si x no es solución de una ecuación polinómica

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n = 0$$

con coeficientes enteros (véase Problema 20). Por ejemplo, π y e son números trascendentes. Demostrar que el conjunto de los números trascendentes no es enumerable.

28. Demostrar: $c^2 \equiv cc = c$. (Por consiguiente, $R \times R$ tiene la potencia del continuo.)

ARITMETICA CARDINAL

29. Demostrar que si $\alpha \leq \beta$, existe un conjunto B con un subconjunto A tal que $\alpha = \#(A)$ y $\beta = \#(B)$.

30. Demostrar que si $\alpha \leq \beta$, entonces para cualquier cardinal γ, (1) $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, (2) $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

31. Sea T el conjunto de los números reales trascendentes. Demostrar que $\#(T) = c$. (En el Problema 27 sólo se demostró que T no era enumerable.)

32. Sea $\alpha = \#(A)$. 2^α se definió como el cardinal de la familia de subconjuntos de A, es decir, que $2^\alpha = \#(2^A)$. También se definió 2^α como cardinal de la familia de todas las funciones de A en un conjunto B, siendo $\#(B) = 2$. Demostrar que estas dos definiciones son equivalentes.

33. Demostrar que para cualesquiera cardinales, α, β y γ, $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.

34. Demostrar que si $\alpha \leq \beta$, entonces para cualquier cardinal γ, (1) $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$, (2) $\gamma^\alpha \leq \gamma^\beta$.

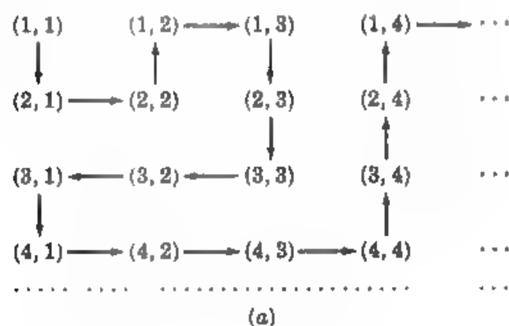
Respuestas a los problemas propuestos

21. La función $f : N \to Z$ definida por

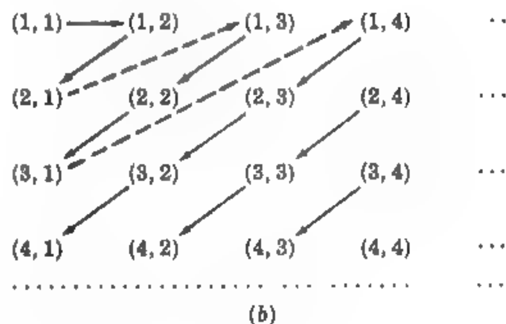
$$f(x) = \begin{cases} -x/2 + 1/2 & \text{si } x \text{ es impar} \\ x/2 & \text{si } x \text{ es par} \end{cases}$$

tiene la propiedad pedida.

22. Considerando los siguientes diagramas de $N \times N$



(a)



(b)

resulta que $N \times N$ se puede escribir como sucesión infinita de elementos diferentes como sigue:

$$N \times N = \{(1,1), (2,1), (2,2), (1,2), (1,3), (2,3), \ldots\}$$
$$N \times N = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), \ldots\}$$

23. *Sugerencia.* Demuéstrese que $\bigcup_{i \in N} A_i$ es equipotente a $N \times N$.

25. Sea S el conjunto de puntos del plano que tiene coordenadas racionales y sea Q el conjunto de los números racionales. Se ve que $S \sim Q \times Q$ porque cada punto $x \in S$ corresponde a un par ordenado único $(q_1, q_2) \in Q \times Q$, y viceversa. Pero como $Q \times Q$ es enumerable, por serlo Q, entonces S es enumerable.

26. Todo intervalo T_i, $i \in I$ contiene al menos un número racional q_i. Por otra parte, si $T_i \neq T_j$ entonces $q_i \neq q_j$ porque T_i y T_j son disjuntos. Por consiguiente, $\{T_i\}_{i \in I}$ es equipotente a un subconjunto $\{q_i\}_{i \in I}$ de los números racionales, con lo cual $\{T_i\}_{i \in I}$ es enumerable.

27. *Sugerencia.* R, que no es enumerable, es la unión de los números algebraicos y los trascendentes.

28. Sea $A = [0, 1]$. Hay que demostrar que $A \times A$ tiene la potencia del continuo. Sean $x, y \in [0, 1]$. Entonces x e y se pueden escribir de una sola manera como decimales de infinitas cifras

$$x = 0, x_1\, x_2\, x_3 \ldots, \qquad y = 0, y_1\, y_2\, y_3$$

no nulas (por ejemplo, se escribe $\frac{1}{2}$ como 0,4999... en vez de 0,5000...).

Sea $f: A \times A \to A$ definida por

$$f((x, y)) = 0, x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots$$

f es inyectiva. Por tanto, $A \times A$ tiene cardinal c a lo sumo. Pero $A \times A$ tiene cardinal c por lo menos, puesto que, por ejemplo,

$$\{(0, x) \mid x \in [0, 1]\}$$

que es un subconjunto de $A \times A$, es equipotente a A. En consecuencia, $A \times A$ tiene por cardinal c, es decir, tiene la potencia del continuo.

Nótese que $\#(A) = c$, luego $c^2 = \#(A \times A) = c$.

32. Sea $B = \{0, 1\}$. Entonces $\#(B) = 2$ y $B^A = C(A)$, el conjunto de funciones características de A. Por el Problema 8, $2^A \sim B^A$. Por tanto, $\#(2^A) = \#(B^A)$.

33. Sean $\alpha = \#(A)$, $\beta = \#(B)$ y $\gamma = \#(C)$, siendo B y C disjuntos. Entonces $\beta + \gamma = \#(B \cup C)$. Nótese que

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \#(A^{B \cup C}) \quad \text{y} \quad \alpha^\beta \alpha^\gamma = \#(A^B \times A^C)$$

y que $A^{B \cup C}$ es el conjunto de todas las funciones definidas en $B \cup C$ y cuyo codominio es A. A^B y A^C tienen parecido significado. El teorema queda aclarado al demostrar que

$$A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$$

Si $f \in A^{B \cup C}$ corresponde al par ordenado de funciones

$$(f \mid B, f \mid C)$$

(la restricción de f a B y la restricción de f a C). Obsérvese que $(f \mid B, f \mid C)$ pertenece a $A^B \times A^C$. La función $F: A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$ definida por

$$F(f) = (f \mid B, f \mid C)$$

es inyectiva y sobreyectiva. Por consiguiente, $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$.

Y entonces $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$

34. Como $\alpha \leq \beta$, existe un conjunto B con un subconjunto A tal que $\alpha = \#(A)$ y $\beta = \#(B)$. Sea además, $\gamma = \#(C)$.

(1) Sea $f \in A^C$, esto es, sea $f: C \to A$. Como $A \subset B$, f se puede considerar como una función de C en B, esto es, $f \in B^C$. Luego A^C es un subconjunto de B^C y, por tanto, $A^C \precsim B^C$. Como $\alpha^\gamma = \#(A^C)$ y $\beta^\gamma = \#(B^C)$, se deduce que $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(2) Sea $f \in C^A$, esto es, sea $f: A \to C$. Sea también una prolongación de f a una función $f': B \to C$. Nótese que si $f \neq g$, entonces $f' \neq g'$, donde g' es una prolongación de g. Por tanto, la función $F: C^A \to C^B$ definida por $F(f) = f'$ es inyectiva. Y entonces $C^A \precsim C^B$. Como $\gamma^\alpha = \#(C^A)$ y $\gamma^\beta = \#(C^B)$, se deduce que $\gamma^\alpha \leq \gamma^\beta$.

Capítulo 10

Conjuntos parcial y totalmente ordenados

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Un *orden parcial* en un conjunto A es una relación $\mathcal{R}$ en A

(1) reflexiva, es decir, $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$,

(2) antisimétrica, esto es, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implican $a = b$,

(3) transitiva, es decir, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ implican $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Si una relación $\mathcal{R}$ en A define un orden parcial en A, entonces $(a, b) \in \mathcal{R}$ se denota por

$$a \precsim b$$

que se lee «a anterior a b».

Ejemplo 1-1: Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos. La relación definida en $\mathscr{A}$ por «x es un subconjunto de y» es un orden parcial en $\mathscr{A}$.

Ejemplo 1-2: Sea A un subconjunto de los números reales. La relación en A definida por «$x \le y$» es un orden parcial en A, que se llama el *orden natural* en A.

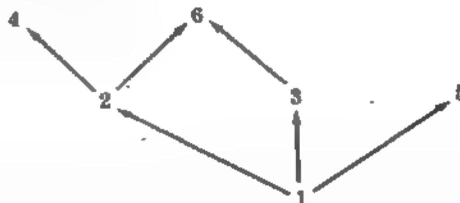
Ejemplo 1-3: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en los números naturales N por «x es múltiplo de y». $\mathcal{R}$ es un orden parcial en N. Y así se tiene $6 \precsim 2$, $15 \precsim 3$ y $17 \precsim 17$.

Ejemplo 1-4: Sea $W = \{a, b, c, d, e\}$. El diagrama



define un orden parcial en W de la siguiente manera: $x \precsim y$ si $x = y$ o si se puede ir de x a y en el diagrama yendo en la dirección ascendente indicada. Nótese que $b \precsim a$, $d \precsim a$ y $e \precsim c$.

Ejemplo 1-5: Sea $\mathcal{R}$ la relación en $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por «x divide a y». $\mathcal{R}$ es un orden parcial en V. Este orden parcial en V se puede describir también por el siguiente diagrama, que es semejante al diagrama del ejemplo anterior y a los diagramas lineales construidos para familias de conjuntos



Ejemplo 1-6: Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en una familia de conjuntos por «X es equipotente a un subconjunto de Y» (es decir, $X \precsim Y$). Por el Teorema 9-8, $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva, y por el Teorema 9-10 de Schroder-Bernstein, $\mathcal{R}$ es antisimétrica. Así, pues, $\mathcal{R}$ es un orden parcial en la familia de conjuntos

Si bien el símbolo $\precsim$ se utilizó antes para denotar una relación entre conjuntos, la relación, como se ve en este ejemplo, es un orden parcial.

Definición 10-1: Un conjunto A y una relación $\mathcal{R}$ de orden parcial en A constituyen un *conjunto parcialmente ordenado*.

Observación 10-1: Nótese que un conjunto parcialmente ordenado consiste en un conjunto A y una relación de tipo particular $\mathcal{R}$ en A; por esta razón, un conjunto parcialmente ordenado se denota a veces como par ordenado

$$(A, \mathcal{R}) \quad \text{o} \quad (A, \precsim)$$

Sin embargo, es corriente emplear el mismo símbolo, A, por ejemplo, para denotar tanto el conjunto parcialmente ordenado como el propio conjunto en que se ha definido el orden parcial

Observación 10-2: En este capítulo y en los siguientes se supone que todo conjunto de números reales está ordenado por el orden natural, al menos que se advierta otra cosa, explícita o implícitamente.

En relación con los conjuntos parcialmente ordenados se emplean, además, las notaciones siguientes:

$a \prec b$ significa $a \precsim b$ y $a \neq b$; léase «a estrictamente anterior a b».
$b \succsim a$ significa $a \precsim b$; léase «b supera a a».
$b \succsim a$ significa $a \precsim b$;. léase «b estrictamente superior a a».
$\not\precsim$, $\not\prec$, $\not\succsim$ y $\not\succ$ se entienden por sí mismas.

Dos elementos a y b de un conjunto parcialmente ordenado se dicen *no comparables* si

$$a \not\precsim b \quad \text{y} \quad b \not\precsim a$$

es decir, si ninguno de ellos precede al otro. En el Ejemplo 1-3, los números 3 y 5 no son comparables, pues ninguno de ellos es múltiplo del otro.

Observación 10-3: Si una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es reflexiva, antisimétrica y transitiva, entonces la relación recíproca $\mathcal{R}^{-1}$ es también reflexiva, antisimétrica y transitiva. O sea que si $\mathcal{R}$ define un orden parcial en A, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ también define un orden parcial en A, que se llama el *orden inverso*.

CONJUNTOS TOTALMENTE ORDENADOS

La palabra «parcial» se emplea al definir un orden parcial en un conjunto A porque algunos elementos de A pueden no ser comparables. Si, por otra parte, cada par de elementos de un conjunto parcialmente ordenado A son comparables, entonces el orden parcial en A se llama *orden total* en A. De ahi la

Definición 10-2: Un *orden total* en un conjunto A es un orden parcial en A más la propiedad

$$a \prec b, a = b \text{ o } a \succ b$$

para cualesquiera dos elementos a y b de A. Un conjunto A y un orden total dado en A constituyen un *conjunto totalmente ordenado*.

Ejemplo 2-1: El orden parcial en cualquier conjunto A de números reales (con el orden natural) es un orden total, puesto que dos números cualesquiera son comparables.

Ejemplo 2-2: Sea $\mathcal{R}$ el orden parcial en $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definido por «x divide a y» $\mathcal{R}$ no es entonces un orden total en V, ya que 3 y 5 no son comparables.

Ejemplo 2-3: Sean A y B conjuntos totalmente ordenados Su producto cartesiano $A \times B$ se puede ordenar entonces totalmente como sigue:

$$(a, b) \prec (a', b') \quad \text{si } a \prec a' \quad \text{o si } a = a' \text{ y } b \prec b'$$

Este orden se llama *orden lexicográfico* de $A \times B$ porque es análogo a la manera como se ordenan las palabras en un diccionario.

Ejemplo 2-4: Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia totalmente ordenada (es decir, I está totalmente ordenado) de conjuntos totalmente ordenados disjuntos dos a dos. Entonces la unión $\cup_{i \in I} A_i$ queda totalmente ordenada (al menos que se diga otra cosa) como sigue Sean $a, b \in \cup_{i \in I} A_i$, existen entonces $j, k \in I$ tales que $a \in A_j$, $b \in A_k$. Ahora bien, si $j \prec k$, $a \precsim b$, y si $j = k$, entonces a y b están ordenados por el orden de A_j.

Observación 10-4: La palabra «orden» será empleada muchas veces, ya por orden parcial, ya por orden total.

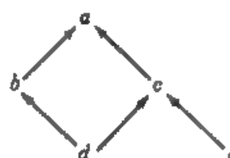
SUBCONJUNTOS DE CONJUNTOS ORDENADOS

Suponiendo una relación $\mathcal{R}$ que define un orden parcial en un conjunto A, o sea que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado, sea B un subconjunto de A. Entonces el orden parcial $\mathcal{R}$ en A induce un orden parcial $\mathcal{R}'$ en B de la siguiente manera: Si $a, b \in B$ entonces

$$(a, b) \in \mathcal{R}', \text{ esto es, } a \precsim b$$

como elementos de B, si, y solamente si, $(a, b) \in \mathcal{R}$, es decir, $a \precsim b$ como elementos de A. Se dice entonces que el conjunto ordenado $(B, \mathcal{R}')$ es un *subconjunto* (parcialmente ordenado) del conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$.

Ejemplo 3-1: Sea $W = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado como sigue:



Entonces $V = \{a, d, e\}$ con el orden



es un subconjunto del conjunto ordenado W. Pero V con el orden



no es un subconjunto del *conjunto ordenado* W.

SUBCONJUNTOS TOTALMENTE ORDENADOS

Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, como ya se vio, el orden parcial en A induce un orden parcial en todo subconjunto de A. Algunos de los subconjuntos de A quedarán en realidad totalmente ordenados.

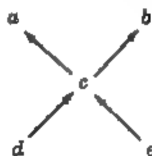
Nótese que si A es un conjunto totalmente ordenado, todo subconjunto de A es totalmente ordenado.

Ejemplo 4-1: Sea N, los números naturales, ordenado por «x es múltiplo de y» Entonces N no esta totalmente ordenado, pues 4 y 7 no son comparables, por ejemplo Pero el conjunto

$$M = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

sí es un subconjunto totalmente ordenado de N

Ejemplo 4-2: Considérese el orden parcial en $W = \{a, b, c, d, e\}$ definido por el diagrama



Cada uno de los conjuntos $\{a, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{a, c, e\}$ y $\{a, c\}$ es un subconjunto de W totalmente ordenado. Los conjuntos $\{a, b, c\}$ y $\{d, e\}$ no son totalmente ordenados

PRIMERO Y ULTIMO ELEMENTOS

Sea A un conjunto ordenado. El elemento $a \in A$ se dice *primer* elemento de A si para todo $x \in A$,

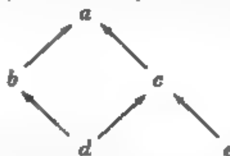
$$a \precsim x$$

es decir, si a es anterior a *todos* los elementos de A. Análogamente, un elemento $b \in A$ se dice *ultimo* elemento de A si, para todo $x \in A$,

$$x \precsim b$$

es decir, si b es posterior a todos los elementos de A.

Ejemplo 5-1: Sea $W = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado por el diagrama siguiente:



Aquí a es un elemento último de W porque es posterior a todo elemento. Nótese que W carece de primer elemento. El elemento d no es un primer elemento porque d no es anterior a e.

Ejemplo 5-2: En los números naturales N, el 1 es un primer elemento de N, pero no hay último elemento.

Ejemplo 5-3: Sea A un conjunto y sea $\mathscr{A}$ la familia de subconjuntos de A, o sea el conjunto potencia de A. Si $\mathscr{A}$ se ordena por «x es un subconjunto de y», resulta ser primer elemento el conjunto vacío y último elemento de $\mathscr{A}$ el conjunto A.

Ejemplo 5-4: Sea $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ ordenado por «$x \leq y$». A está entonces totalmente ordenado, pero no tiene primero ni último elemento.

Observación 10-5: Un conjunto parcialmente ordenado puede tener a lo más un primer elemento y un último elemento.

Observación 10-6: Si a y b son primero y último elementos, respectivamente, de un conjunto parcialmente ordenado A, entonces a y b serán último y primer elementos, respectivamente, el orden inverso de A.

ELEMENTOS MAXIMAL Y MINIMAL

Sea A un conjunto ordenado. Se dice que un elemento $a \in A$ es *maximal* si

$$a \precsim x \quad \text{implica} \quad a = x$$

Es decir, a es un elemento *maximal* si no hay en A ningún elemento posterior a a en sentido estricto. Análogamente, se dice que un elemento $b \in A$ es minimal si

$$x \precsim b \quad \text{implica} \quad b = x$$

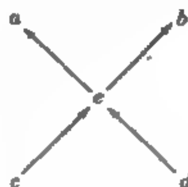
esto es, si ningún elemento de A es estrictamente anterior a b.

Ejemplo 6-1: Sea $W = \{a, b, c, d, e\}$ un conjunto ordenado por el siguiente diagrama



Tanto d como e son elementos minimales, puesto que no hay en W ningun elemento estrictamente anterior a ninguno de ellos. El elemento a es un elemento maximal.

Ejemplo 6-2: *Sea $W = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado por el diagrama:*



Aquí a y b son elementos maximales, y c y d son minimales. Obsérvese que W no tiene primero ni último elemento.

Ejemplo 6-3: Sea $V = \{x \mid 0 < x < 1\}$. V no tiene elemento maximal ni elemento minimal.

Las observaciones siguientes muestran las relaciones entre los conceptos antes definidos. A es aquí un conjunto parcialmente ordenado.

Observación 10-7: Si a es un primer elemento de A, entonces a es un elemento minimal de A y es único. Asimismo, un último elemento de A es un elemento maximal de A y es único.

Observación 10-8: Si A es totalmente ordenado, puede tener a lo más un elemento minimal, que será entonces primer elemento. De igual modo, puede contener a lo más un elemento maximal, que será entonces último elemento.

Observación 10-9: Todo conjunto finito parcialmente ordenado tiene por lo menos un elemento maximal y *un elemento minimal. Un conjunto infinito ordenado, como en el* Ejemplo 6-3, puede no tener elementos maximales o minimales, aun en el caso de ser totalmente ordenado.

MAYORANTES Y MINORANTES

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado A. Un elemento m de A se llama *minorante* de B si, para todo $x \in B$,

$$m \precsim x$$

es decir, si m es anterior o inferior a *todo* elemento de B. Si un minorante de B es posterior o superior a todos los otros minorantes de B, se dice que es el *extremo inferior* o el *ínfimo* de B y se le denota por

$$\inf(B)$$

En general, B puede no tener minorantes o tener muchos, pero solo puede haber a lo más un inf (B).

Análogamente, un elemento M de A se llama *mayorante* de B si M es posterior o superior a todos los elementos de B, esto es, si para todo $x \in B$

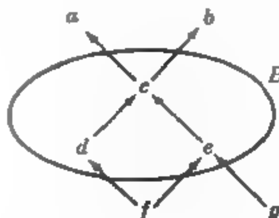
$$x \precsim M$$

Si un mayorante de B es anterior o inferior a todos los mayorantes de B, se dice que es el *extremo superior* o *supremo* de B y se le denota por

$$\sup(B)$$

Solo puede haber un sup (B) a lo más.

Ejemplo 7-1: Sea $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenado por el siguiente diagrama



Sea $B = \{c, d, e\}$. Entonces a, b y c son mayorantes de B, y f es el único minorante de B. Nótese que g no es un minorante de B porque g no es anterior a d, g y d no son comparables. Por otra parte, $c = \sup(B)$ pertenece a B, en tanto que $f = \inf(B)$ no pertenece a B.

Ejemplo 7-2: Sea A un conjunto de números reales acotado, es decir, que tiene mayorantes (o que es mayorado) y que tiene minorantes (o que es minorado). Se verifica entonces un importante teorema sobre los números reales que establece la existencia de $\inf(A)$ y de $\sup(A)$ en la ordenación natural de R.

Ejemplo 7-3: Sea Q el conjunto de los números racionales. Sea

$$B = \{x \mid x \in Q,\ 2 < x^2 < 3\}$$

es decir, B consiste en los números racionales entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ sobre la recta real. B tiene entonces infinitos mayorantes y minorantes, pero $\inf(B)$ y $\sup(B)$ no existen. Es decir, B no tiene extremos ni inferior ni superior. Nótese que los números reales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no pertenecen a Q y no se les puede considerar como mayorantes o minorantes de B.

CONJUNTOS ISOMORFOS

Se dice que dos conjuntos ordenados son *isomorfos* si existe entre sus elementos una correspondencia biunívoca que preserva la relación de orden. En particular,

Definición 10-3: Un conjunto ordenado A es isomorfo a un conjunto ordenado B, lo que se denota por

$$A \simeq B$$

si existe una función $f: A \to B$ inyectiva y sobreyectiva y que tiene la propiedad de que, para cualesquiera elementos $a, a' \in A$,

$$a \prec a' \text{ si, y solo si, } f(a) \prec f(a')$$

La función f se dice *aplicación isomorfa* o *isomorfismo* de A en B.

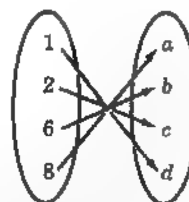
Ejemplo 8-1: Sea $V = \{1, 2, 6, 8\}$ ordenado por «x divide a y», y sea $W = \{a, b, c, d\}$ ordenado por el siguiente diagrama:



Un diagrama de V será el siguiente:



Entonces $V \simeq W$ porque la función $f: V \to W$ definida por



es un isomorfismo de V en W, es decir, establece una correspondencia biunívoca entre los elementos preservando la relación de orden. Nótese que

$$g = \{(1, d), (2, c), (6, a), (8, b)\}$$

es también un isomorfismo de V en W.

Ejemplo 8-2: Considérense los números naturales $N = \{1, 2, \dots\}$ y los enteros negativos $M = \{-1, -2, \dots\}$ ordenados ambos por el orden natural «$x \leq y$». Entonces N no es isomorfo a M. *Porque si $f: N \to M$ es un isomorfismo, entonces para todo $a \in N$,*

$$1 \precsim a \text{ implicaría } f(1) \precsim f(a)$$

para todo $f(a) \in M$. Como M carece de primer elemento, f no puede existir.

Ejemplo 8-3: Los números naturales $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ son un conjunto isomorfo al de los números pares $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ porque la función $f: N \to E$ definida por $f(x) = 2x$ es un isomorfismo de N en E.

Los siguientes teoremas resultan directamente de la definición de conjuntos isomorfos.

Teorema 10-1-1: Si A es totalmente ordenado y $B \simeq A$, B es totalmente ordenado.

Teorema 10-1-2: Sea $f: A \to B$ un isomorfismo. Entonces $a \in A$ es primer elemento (último, minimal o maximal) si, y solamente si, $f(a)$ es primer elemento (último, minimal o maximal) de B.

Teorema 10-1-3: Si A es isomorfo a B, entonces A es equipotente a B.

El siguiente teorema es importante para la teoría que se va a desarrollar.

Teorema 10-2: La relación definida entre conjuntos ordenados por $A \simeq B$ es una relación de equivalencia, es decir,

(1) $A \simeq A$ para todo conjunto ordenado
(2) Si $A \simeq B$, es $B \simeq A$
(3) Si $A \simeq B$ y $B \simeq C$, es $A \simeq C$

Observación 10-10: La condición en la Definición 10-3 de que

$$a \prec a' \text{ si, y solo si, } f(a) \prec f(a')$$

es equivalente a las dos condiciones siguientes:

(1) $a \prec a'$ implica $f(a) \prec f(a')$; (luego $a \succ a'$ implica $f(a) \succ f(a')$).
(2) $a \parallel a'$ (no comparables) implica $f(a) \parallel f(a')$.

Por tanto, si los conjuntos están totalmente ordenados, solo (1) es necesaria.

TIPOS ORDINALES

Según el Teorema 10-2, la relación definida entre conjuntos ordenados por

$$A \simeq B$$

es una relación de equivalencia. Por tanto, según el teorema fundamental sobre relaciones de equivalencia, todos los conjuntos parcialmente ordenados, y, en particular, todos los conjuntos totalmente ordenados, quedan repartidos por esta relación en clases disjuntas de conjuntos isomorfos.

Definición 10-4: Sea A un conjunto totalmente ordenado y sea ξ la familia de los conjuntos isomorfos al A. ξ se llama entonces el *tipo de orden* de A o el *tipo ordinal* de A.

El tipo ordinal de cada uno de los conjuntos N, Z y Q, o sea los números naturales, enteros y racionales, se denota respectivamente por ω, π y η.

Si ξ es el tipo ordinal de un conjunto ordenado A, entonces ξ^* denotará el tipo de orden de A con el orden inverso.

Ejemplo 9-1: El tipo ordinal de $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ es ω porque E es isomorfo a N.

Ejemplo 9-2: Nótese que $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ en el orden natural no es isomorfo a N en el orden inverso, así que $\omega \neq \omega^*$. Pero $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ en el orden natural es isomorfo a Z en el orden inverso. Por tanto, $\pi = \pi^*$.

Problemas resueltos

CONJUNTOS ORDENADOS Y SUBCONJUNTOS

1. La relación en N, los números naturales, definida por «x divide a y» es un orden parcial.

   (1) Insertar el símbolo correcto, $\prec$, $\succ$ o $\|$ (no comparable), entre cada par de numeros.

$$(a)\ 2___8, \quad (b)\ 18___24, \quad (c)\ 9___3, \quad (d)\ 5___15$$

   (2) Decir si cada uno de los siguientes subconjuntos de N es totalmente ordenado.

   (a) $\{24, 2, 6\}$, (b) $\{3, 15, 5\}$, (c) $\{15, 5, 30\}$, (d) $\{2, 8, 32, 4\}$, (e) $\{1, 2, 3, \ldots\}$, (f) $\{7\}$

Solución:

(1) (a) Porque 2 divide a 8, 2 es anterior a 8, o sea $2 \prec 8$.
(b) 18 no divide a 24, y 24 no divide a 18; así, $18 \| 24$.
(c) Como 9 es divisible por 3, $9 \succ 3$.
(d) Como 5 divide a 15, $5 \prec 15$.

(2) (a) Puesto que 2 divide a 6, el cual divide a 24, el conjunto es totalmente ordenado.
(b) Como 3 y 5 no son comparables, el conjunto no es totalmente ordenado.
(c) El conjunto es totalmente ordenado porque 5 divide a 15, el cual divide a 30.
(d) El conjunto es totalmente ordenado porque $2 \prec 4 \prec 8 \prec 32$.
(e) El conjunto no es totalmente ordenado, pues 2 y 3 no son comparables.
(f) Cualquier conjunto formado por un solo elemento es totalmente ordenado.

2. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$, ordenado por el siguiente diagrama:



   (1) Insertar el símbolo correcto, $\prec$, $\succ$ o $\|$ (no comparables), entre cada par de elementos:

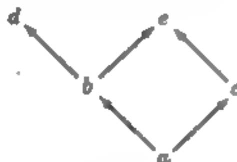
$$(a)\ a___e, \quad (b)\ b___c, \quad (c)\ d___a, \quad (d)\ c___d$$

   (2) Construir un diagrama de los elementos de V que defina el orden inverso.

Solución:

(1) (a) Como hay un «camino» de e a c a a, e es anterior a a; por tanto, $a \succ e$.
(b) No habiendo camino de b a c, o viceversa, $b \| c$.
(c) Hay un camino de d a b a a; luego $d \prec a$.
(d) Ni $d \prec c$ ni $c \prec d$; entonces $c \| d$.

(2) El orden inverso se encuentra invirtiendo el diagrama original y poniendo las flechas en sentido contrario, así:



3. Ordénense los números naturales, N, como sigue. Cada par de elementos a, $a' \in N$ se pueden escribir de manera unívoca así:

$$a = 2^r(2s + 1), \quad a' = 2^{r'}(2s' + 1)$$

donde $r, r', s, s' \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Sea

$$a \prec a' \text{ si } r < r' \text{ o si } r = r' \text{ pero } s < s'$$

Insertar el símbolo correcto, $\prec$ o $\succ$, entre cada par de números siguientes:

$$(a)\ 5___\ 14, \quad (b)\ 6___9, \quad (c)\ 3___\ 20, \quad (d)\ 14___\ 21$$

Solución:

Los elementos de N se pueden escribir como sigue:

r \ s	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1	3	5	7	9	11	13	15	
1	2	6	10	14	18	22	26	30	
2	4	12	20	28	36	44	52	60	
	.	.	.	.	.	.	.	.	

Y entonces un número de una fila superior es anterior a un número de una fila inferior y, si dos números están en la misma fila, el de la izquierda precede o es anterior al número de la derecha. En consecuencia

$$(a)\ 5 \prec 14, \quad (b)\ 6 \succ 9, \quad (c)\ 3 \prec 20, \quad (d)\ 14 \succ 21$$

4. Sea $N \times N$ en orden lexicográfico. Insertar el símbolo correcto, $\prec$ o $\succ$, entre cada par de elementos de $N \times N$ que aparecen a continuación:

$$(a)\ (5,78)___(7,1), \quad (b)\ (4,6)___(4,2), \quad (c)\ (5,5)___(4,23), \quad (d)\ (1,3)___(1,2)$$

Solución:

Obsérvese que, de acuerdo con el orden lexicográfico,

$$(a, b) \prec (a', b') \quad \text{si } a < a' \qquad \text{o} \qquad \text{si } a = a' \text{ pero } b < b'$$

(a) $(5, 78) \prec (7, 1)$, pues $5 < 7$
(b) $(4, 6) \succ (4, 2)$, pues $4 = 4$ pero $6 > 2$
(c) $(5, 5) \succ (4, 23)$, pues $5 > 4$
(d) $(1, 3) \succ (1, 2)$, pues $1 = 1$ pero $3 > 2$

5. Sea $A = (N, \leqslant)$, el conjunto de los números naturales en el orden natural, y sea $B = (N, \geqslant)$, el mismo conjunto en el orden inverso. Además, denótese con $A \times B$ el orden lexicográfico de $N \times N$ según el orden de A y de B. Insertar el símbolo correcto, $\prec$ o $\succ$, entre cada par de elementos de $N \times N$ que aparecen en seguida.

$$(a)\ (3,8)___(1,1), \quad (b)\ (2,1)___(2,8), \quad (c)\ (3,3)___(3,1), \quad (d)\ (4,9)___(7,15)$$

Solución:

Se aplica la regla: $(a, b) \prec (a', b')$ si $\begin{cases} a < a' \\ \text{o } a = a' \text{ pero } b > b' \end{cases}$

(a) $(3, 8) \succ (1, 1)$, pues $3 > 1$, es decir, $3 \succ 1$, según el orden de A
(b) $(2, 1) \succ (2, 8)$, pues $2 = 2$ pero $1 < 8$; es decir, $1 \succ 8$, según el orden de B
(c) $(3, 3) \prec (3, 1)$, pues $3 = 3$ pero $3 > 1$, es decir, $3 \prec 1$, según el orden de B
(d) $(4, 9) \prec (7, 15)$, pues $4 < 7$, es decir, $4 \prec 7$, según el orden de A

6. Sea $\mathscr{A}$ la familia de los subconjuntos A de los números naturales N, donde A tiene las siguientes características: A es finito y el máximo común divisor de los elementos de A es 1.

(1) Establecer si los siguientes subconjuntos de N pertenecen o no a $\mathscr{A}$.

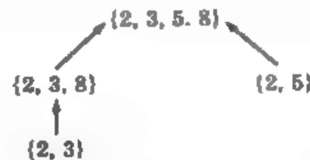
(a) $\{2, 3, 8\}$	(c) $\{2, 5\}$	(e) $\{4, 6, 8\}$
(b) $\{2, 3, 5, 8\}$	(d) $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$	(f) $\{2, 3\}$

(2) Ordenado $\mathscr{A}$ por inclusión de conjuntos, es decir, por $X \precsim Y$ si $X \subset Y$, sea $\mathscr{B}$ la subfamilia de $\mathscr{A}$ que contiene los conjuntos en (1) que pertenecen a $\mathscr{A}$. Construir un diagrama de $\mathscr{B}$.

Solución:

(1) El máximo común divisor de $\{4, 6, 8\}$ es 2, y el conjunto $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ no es finito, así que estos dos conjuntos no pertenecen a $\mathscr{A}$. Todos los otros sí pertenecen a $\mathscr{A}$ y, por tanto, a $\mathscr{B}$.

(2) Un diagrama de $\mathscr{B}$ es como sigue:



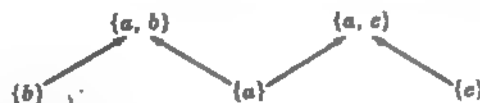
7. Sea $A = \{a, b, c\}$ ordenado como sigue:



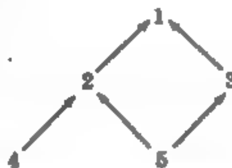
Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos no vacíos de A totalmente ordenados, y supóngase $\mathscr{A}$ parcialmente ordenada por inclusión de conjuntos. Construir un diagrama de $\mathscr{A}$.

Solución:

Los subconjuntos de A totalmente ordenados son $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$. Así que un diagrama de $\mathscr{A}$ será así:



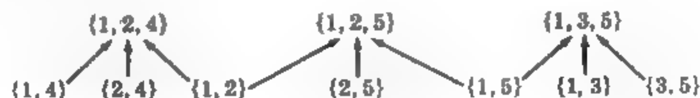
8. Sea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ordenado como sigue:



Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos de B totalmente ordenados que contienen 2 o más elementos, y supóngase parcialmente ordenada por inclusión. Construir un diagrama de $\mathscr{B}$.

Solución:

Los elementos de $\mathscr{B}$ son: $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}$. Por tanto, el diagrama de $\mathscr{B}$ es como sigue:



MINIMAL, MAXIMAL, PRIMERO Y ULTIMO ELEMENTOS

9. Sea $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ordenado por «x divide a y». (1) Hallar todos los elementos minimales. (2) Hallar todos los elementos maximales.

Solución:

(1) Si p es un número primo, entonces p divide a p solamente (porque $1 \notin A$); por tanto, todos los números primos son elementos minimales. Si $a \in A$ no es primo, hay entonces un número $b \in A$ tal que b divide a a, o sea que $b \precsim a$, y $b \neq a$. Por consiguiente, los únicos elementos minimales son los números primos.

(2) No hay elementos maximales, porque para todo $a \in A$, a divide a $2a$, por ejemplo.

10. Sea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ordenado como sigue:



(1) Hallar todos los elementos minimales. (2) Hallar todos los elementos maximales (3) ¿Tiene B un primer elemento? (4) ¿Tiene B un último elemento?

Solución:

(1) Ningún elemento es estrictamente anterior a 4 ó 5: con que 4 y 5 son elementos minimales

(2) El único elemento maximal es 1

(3) No hay primer elemento; 5 no es primer elemento porque 5 no es anterior a 4

(4) El número 1 es un último elemento porque es posterior a todo elemento de B

11. Demostrar que si a y b son elementos minimales de un conjunto A totalmente ordenado, entonces $a = b$

Solución:

Los elementos a y b son comparables puesto que A es totalmente ordenado, así que $a \precsim b$ o $b \precsim a$. Como b es un elemento minimal, $a \precsim b$ implica $a = b$, y como a es un elemento minimal, $b \precsim a$ implica $b = a$. En todo caso $a = b$.

12. Sea $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ordenado por «x es múltiplo de y». (1) Hallar todos los elementos maximales de B. (2) Hallar todos los elementos minimales de B. (3) ¿Tiene B un primero o un último elemento?

Solución:

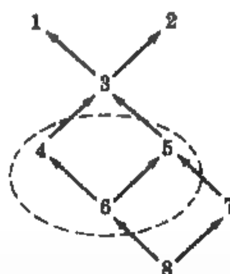
Construyase primero un diagrama de B como sigue:



(1) Los elementos maximales son 3, 2 y 5. (2) Los elementos minimales son 9, 6, 8 y 10. (3) No hay primero ni último elemento

MAYORANTES Y MINORANTES

13. Sea $W = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ ordenado así:



Considérese el subconjunto $V = \{4, 5, 6\}$ de W (1) Hallar el conjunto de mayorantes de V. (2) Hallar el conjunto de minorantes de V. (3) ¿Existe el sup (V)? (4) ¿Existe el inf (V)?

Solución:

(1) Cada uno de los elementos de $\{1, 2, 3\}$, y solo éstos, es posterior a todo elemento de V y, por tanto, es mayorante

(2) Solo 6 y 8 son anteriores a todo elemento de V; por tanto, $\{6, 8\}$ es el conjunto de los minorantes. Nótese que 7 no es un minorante porque 7 no es anterior a 4 ni a 6.
(3) Como 3 es un primer elemento en el conjunto de los mayorantes de V, $\sup(V) = 3$. Nótese que 3 no pertenece a V
(4) Como 6 es un último elemento del conjunto de los minorantes de V, $\inf(V) = 6$. Nótese aquí que 6 pertenece a V

14. Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordenado como sigue:



Considérese el subconjunto $E = \{2, 3, 4\}$ de D. (1) Hallar el conjunto de mayorantes de E. (2) Hallar el conjunto de minorantes de E. (3) ¿Existe sup (E)? (4) ¿Existe inf (E)?

Solución:

(1) 1 y 2, y ningún otro elemento, son posteriores a todo número de E; luego $\{1, 2\}$ es el conjunto de mayorantes de E
(2) 5 y 6, y solo estos números, son anteriores a todo número de E; luego $\{6, 5\}$ es el conjunto de minorantes de E.
(3) Como 2 es un primer elemento en $\{1, 2\}$, el conjunto de mayorantes de E, entonces $\sup(E) = 2$.
(4) Como $\{5, 6\}$, el conjunto de minorantes de E, carece de último elemento, no existe $\inf(E)$.

15. Sean Q, el conjunto de los números racionales, y su subconjunto $A = \{x \mid x \in Q,\ x^3 < 3\}$.
(1) ¿A es mayorado, es decir, tiene A un mayorante?
(2) ¿A es minorado, es decir, tiene A un minorante?
(3) ¿Existe sup (A)?
(4) ¿Existe inf (A)?

Solución:

(1) *A es mayorado porque, por ejemplo, 50 es un mayorante.*
(2) No hay minorantes de A; luego A no es minorado.
(3) Sup(A) no lo hay. Considerando A como un subconjunto de R, los números reales, entonces $\sqrt[3]{3}$ sería el extremo superior de A; pero como subconjunto de Q, no existe $\sup(A)$.
(4) *Tampoco hay $\inf(A)$ puesto que el conjunto de minorantes es vacío.*

16. Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos parcialmente ordenada por inclusión, y sea $\mathscr{B} = \{A_i\}_{i \in I}$ un subconjunto de $\mathscr{A}$.
(1) Demostrar que si $B \in \mathscr{A}$ es un mayorante de $\mathscr{B}$, entonces $(\bigcup_{i \in I} A_i) \subset B$.
(2) ¿Es $\bigcup_{i \in I} A_i$ un mayorante de $\mathscr{B}$?

Solución:

(1) Sea x un elemento de $\bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces existe un A_j con $j \in I$, tal que $x \in A_j$. Como B es un mayorante, $A_j \supset B$, luego x pertenece a B. Como $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ implica $x \in B$, entonces $(\bigcup_{i \in I} A_i) \subset B$
(2) Aun siendo $\{A_i\}_{i \in I}$ una subfamilia de $\mathscr{A}$, puede suceder que la unión $\bigcup_{i \in I} A_i$ no sea elemento de $\mathscr{A}$. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un mayorante de $\mathscr{B}$ si, y solamente si, $\bigcup_{i \in I} A_i$ pertenece a $\mathscr{A}$.

17. Sea N, los números naturales, ordenado por «x divide a y», y sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un subconjunto finito de N. (1) ¿Existe inf (A)? (2) ¿Existe sup (A)?

Solución:

(1) El máximo común divisor de los elementos de A es $\inf(A)$ y existe siempre.
(2) El mínimo común múltiplo de los elementos de A es $\sup(A)$ y existe siempre.

CONJUNTOS ISOMORFOS

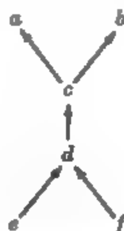
18. Dar un ejemplo de un conjunto ordenado $X = \{A, \mathcal{R}\}$ isomorfo al $Y = \{A, \mathcal{R}^{-1}\}$, el conjunto A con el orden inverso.

Solución:

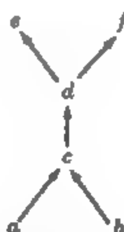
El conjunto de los numeros racionales Q, con el orden natural, es isomorfo a Q con el orden inverso. En efecto, la función $f: Q \to Q$ definida por $f(x) = -x$ es un isomorfismo porque para reales cualesquiera

$$x \leq y \quad \text{si, y solamente si,} \quad -x \geq -y$$

Como segundo ejemplo, sea el conjunto $W = \{a, b, c, d, e, f\}$ ordenado como sigue



El diagrama siguiente, obtenido invirtiendo el diagrama original y las flechas, define el orden inverso.



Nótese que los dos diagramas son semejantes. La función

$$f = \{(a, e), (b, f), (c, d), (d, c), (e, a), (f, b)\}$$

es un isomorfismo

19. Sea A un conjunto ordenado y, para todo elemento $a \in A$, sea $S(a)$ el conjunto de los elementos anteriores a a; es decir, que

$$S(a) = \{x \mid x \in A, x \precsim a\}$$

Sea, además, $\mathcal{A} = \{S(a)\}_{a \in A}$, la familia de todos los conjuntos $S(a)$, ordenada parcialmente por inclusión. Demostrar que A es isomorfo a $\mathcal{A}$.

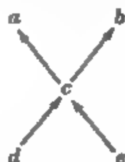
Solución:

Hay que demostrar que la funcion $f: A \to \mathcal{A}$ definida por $f: x \to S(x)$ es un isomorfismo. Si $a \precsim b$ entonces $x \precsim a$ implica $x \precsim b$, por tanto, $a \precsim b$ implica $S(a) \subset S(b)$. Asi si $S(a) \subset S(b)$, entonces $a \in S(a)$ pertenece tambien a $S(b)$, luego $S(a) \subset S(b)$ implica $a \precsim b$. De modo que f preserva el orden.

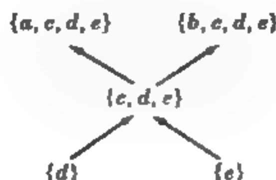
Por definición, f es sobreyectiva. Demostremos que tambien es inyectiva. Si $a \neq b$, entonces o bien $a \prec b$, o $b \prec a$ o a y b no son comparables. En el primero y ultimo casos, $b \in S(b)$ no pertenece a $S(a)$. En el segundo caso, $a \in S(a)$ no pertenece a $S(b)$. Asi, pues, en todos los casos, $S(a) \neq S(b)$. Por consiguiente, f es inyectiva.

Y se tiene entonces, que f es un isomorfismo.

Por ejemplo, considérese el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado así



Obsérvese que $\mathscr{A} = \{S(a), S(b), S(c), S(d), S(e)\}$ está ordenado como sigue



Y, además, que los dos diagramas son semejantes.

Problemas propuestos

CONJUNTOS ORDENADOS Y SUBCONJUNTOS

20. La relación en N, los numeros naturales, definida por «x es multiplo de y» es un orden parcial

(1) Insertar el símbolo correcto, $\prec$, $\succ$, o $\|$ (no comparables) entre cada par de numeros

(*a*) 3 ___ 7, (*b*) 2 ___ 8, (*c*) 6 ___ 1, (*d*) 3 ___ 33

(2) Decir si los siguientes subconjuntos de N están o no totalmente ordenados.

(*a*) {8, 2, 24} (*c*) {5, 1, 9} (*e*) {2, 4, 6, 8, ...}

(*b*) {5} (*d*) {2, 4, 8, 24} (*f*) {15, 3, 9}

21. Sea $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordenado como sigue:



(1) Insertar el simbolo correcto, $\prec$, $\succ$, o $\|$ (no comparables) entre cada par de elementos

(*a*) 1 ___ 6, (*b*) 4 ___ 5, (*c*) 5 ___ 1, (*d*) 4 ___ 2

(2) Construir un diagrama de los elementos de W que defina el orden inverso.

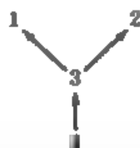
(3) Hallar todos los subconjuntos de W totalmente ordenados, y que contenga cada uno al menos tres elementos.

(4) Hallar todos los subconjuntos de W totalmente ordenados en el orden inverso, y que contenga cada uno al menos tres elementos.

22. Sea $A = (N, \preceq)$ los números naturales con el orden natural, sea $B = (N, \geq)$ los numeros naturales con el orden inverso y sea $A \times B$, en orden lexicográfico. Insertar el símbolo correcto, $\prec$ o $\succ$, entre cada par de los siguientes elementos de $A \times B$.

(*a*) (1, 3) ___ (1, 5), (*b*) (4, 1) ___ (2, 18), (*c*) (4, 30) ___ (4, 4), (*d*) (2, 2) ___ (15, 15)

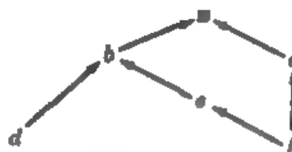
23. Sea $D = \{1, 2, 3, 4\}$ ordenado como sigue:



Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos no vacios de D totalmente ordenadas por inclusión. Construir un diagrama de $\mathscr{B}$.

MINIMAL, MAXIMAL, PRIMERO Y ULTIMO ELEMENTOS

24. Sea $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ordenado así



(1) (*a*) Hallar todos los elementos minimales de B.
(*b*) Hallar todos los elementos maximales de B
(*c*) ¿Tiene B un primer elemento?
(*d*) ¿Tiene B un último elemento?

(2) Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos no vacíos totalmente ordenados, y supóngase $\mathscr{A}$ ordenada por inclusión

(*a*) Hallar todos los elementos maximales de $\mathscr{A}$.
(*b*) Hallar todos los elementos minimales de $\mathscr{A}$.
(*c*) ¿Tiene $\mathscr{A}$ un primer elemento?
(*d*) ¿Tiene $\mathscr{A}$ un último elemento?

25. Sea $M = \{2, 3, 4, \ldots\}$ y supóngase $M \times M$ ordenado como sigue:

$$(a, b) \precsim (c, d) \quad \text{si } a \text{ divide a } c \text{ y si } b \text{ es menor o igual que } d$$

(1) Encontrar todos los elementos minimales. (2) Encontrar todos los elementos maximales.

26. Sea $M = \{2, 3, 4, \ldots\}$ ordenado por «x divide a y». Por otra parte, sea $\mathscr{M}$ la familia de todos los subconjuntos no vacíos totalmente ordenados de M, estando $\mathscr{M}$ parcialmente ordenada por inclusión (1) Hallar todos los elementos minimales de $\mathscr{M}$. (2) Hallar todos los elementos maximales de $\mathscr{M}$

27. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes aserciones, y en caso de falsa dar un contra-ejemplo

(1) Si un conjunto parcialmente ordenado A tiene solo un elemento maximal a entonces a es también un último elemento

(2) Si un conjunto finito A parcialmente ordenado tiene solo un elemento maximal a, entonces a es también un último elemento.

(3) Si un conjunto A totalmente ordenado tiene solamente un elemento maximal a, entonces a es también un último elemento.

MAYORANTES Y MINORANTES

28. Sea $W = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ ordenado como sigue:



(1) Considerando el subconjunto $A = \{4, 5, 7\}$ de W.
(*a*) Hallar el conjunto de mayorantes de A.
(*b*) Hallar el conjunto de minorantes de A.
(*c*) ¿Existe $\sup(A)$?
(*d*) ¿Existe $\inf(A)$?

(2) Considerando el subconjunto $B = \{2, 3, 6\}$ de W.
(*a*) Hallar el conjunto de mayorantes de B.
(*b*) Hallar el conjunto de minorantes de B.
(*c*) ¿Existe $\sup(B)$?
(*d*) ¿Existe $\inf(B)$?

(3) Considerando el subconjunto $C = \{1, 2, 4, 7\}$ de W.
(*a*) Hallar el conjunto de mayorantes de C.
(*b*) Hallar el conjunto de minorantes de C.
(*c*) ¿Existe $\sup(C)$?
(*d*) ¿Existe $\inf(C)$?

29. Sean Q, el conjunto de los números racionales con el orden natural, y su subconjunto A:

$$A = \{x \mid x \in Q,\ 8 < x^3 < 15\}$$

(1) ¿Es A mayorado? (2) ¿Es A minorado? (3) ¿Existe $\sup(A)$? (4) ¿Existe $\inf(A)$?

CONJUNTOS ISOMORFOS

30. Hallar el máximo número de conjuntos de tres elementos parcialmente ordenados no isomorfos dos a dos, y construyase un diagrama de cada uno.

31. Demostrar el Teorema 10-2: La relación definida entre conjuntos por $A \simeq B$ es una relación de equivalencia.

Respuestas a los problemas propuestos

20. (1) (*a*) $3 \parallel 7$, (*b*) $2 \succ 8$, (*c*) $6 \prec 1$, (*d*) $3 \succ 33$
(2) (*a*) Sí (*b*) Sí, (*c*) No, (*d*) Sí, (*e*) No, (*f*) No

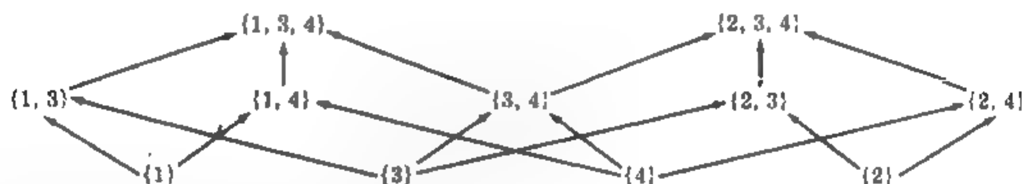
21. (1) (*a*) $1 \succ 6$, (*b*) $4 \quad 5$, (*c*) $5 \parallel 1$, (*d*) $4 \prec 2$
(2)



(3) {1, 3, 4}, {1, 3, 6}, {2, 3, 4}, {2, 3, 6}, {2, 5, 6}
Los mismos conjuntos que en (3).

22. (*a*) $(1,3) \succ (1,5)$, (*b*) $(4,1) \succ (2,18)$, (*c*) $(4,30) \prec (4,4)$, (*d*) $(2,2) \prec (15,15)$

23.



24. (1) (*a*) *d* y *f*. (*b*) *a*, (*c*) No, (*d*) Sí, *a* es un último elemento.
(2) (*a*) {*a*, *b*, *d*}, {*a*, *b*, *e*, *f*}, {*a*, *c*, *f*}.
(*b*) Los subconjuntos de un elemento: {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*}, {*e*}, {*f*}
(*c*) No, (*d*) No

25. (1) Cualquier par ordenado (*p*, 2), donde *p* es primo, es un elemento minimal.
(2) No hay elemento maximal

26. (1) Cada subconjunto de un elemento es un elemento minimal.
(2) Cada conjunto de la forma $\{p_1, p_1p_2, p_1p_2p_3, \ldots\}$, donde $p_1, p_2, \ldots$ es cualquier sucesión de primos, es un elemento maximal.

27. (1) Falsa. Considérese, por ejemplo, el conjunto {*a*, 1, 2, 3, ...} ordenado como sigue

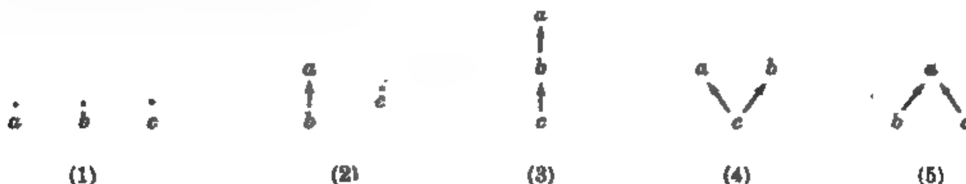


Nótese que el subconjunto {1, 2, 3, ...} tiene el orden natural. Entonces *a* es un elemento maximal, el único, pero no es un último elemento.
(2) Cierta. (3) Cierta. En efecto, un conjunto totalmente ordenado puede tener a lo más un elemento maximal que será siempre un último elemento.

28. (1) (*a*) {1, 2, 3}, (*b*) {8}, (*c*) sup(*A*) = 3, (*d*) inf(*A*) = 8
(2) (*a*) {2}, (*b*) {6, 8}, (*c*) sup(*B*) = 2, (*d*) inf(*B*) = 6
(3) (*a*) ∅. No hay mayorantes. (*b*) {8}, (*c*) No, (*d*) inf(*C*) = 8.

29. (1) Sí, (2) Sí, (3) No, (4) inf(*A*) = 2

30. Hay cinco maneras no isomorfas de ordenar tres elementos, o sea de ordenar un conjunto *A* = {*a*, *b*, *c*}:



Capítulo 11

Conjuntos bien ordenados. Números ordinales

CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

No todo conjunto ordenado, ni aun totalmente ordenado, tiene un primer elemento. Una de las propiedades fundamentales de N, el conjunto de los números naturales con el orden natural, es que N y cada subconjunto de N tiene un primer elemento. Un conjunto ordenado se dice *bien ordenado* si tiene esta propiedad. Así, pues,

Definición 11-1: Sea A un conjunto ordenado tal que cada subconjunto de A tiene un primer elemento. A se dice entonces conjunto *bien ordenado*.

En particular, todo conjunto A bien ordenado es totalmente ordenado. Pues si $a, b \in A$, el subconjunto $\{a, b\}$ de A tiene un primer elemento, que, por tanto, debe ser anterior al otro, y entonces dos elementos cualesquiera de A son comparables.

Los siguientes teoremas resultan directamente de la anterior definición.

Teorema 11-1-1: Todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es bien ordenado.

Teorema 11-1-2: Si A es bien ordenado y B es isomorfo a A, entonces B es bien ordenado.

Ejemplo 1-1: Sean los subconjuntos ordenados

$$A_1 = \{1, 3, 5, \ldots\} \quad \text{y} \quad A_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

de N, que son también bien ordenados. Entonces la unión (ordenada de izquierda a derecha)

$$A_1 \cup A_2 = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6, \ldots\}$$

es también bien ordenada. Este ejemplo muestra que es posible que un conjunto, tal como el $N = A_1 \cup A_2$ sea bien ordenado de más de una manera.

El ejemplo anterior se puede generalizar como sigue:

Teorema 11-2: Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia bien ordenada de conjuntos bien ordenados disjuntos dos a dos. Entonces la unión de los conjuntos $\bigcup_{i \in I} A_i$ es bien ordenada. (El orden de la unión de una familia totalmente ordenada de conjuntos totalmente ordenados está definido en el Ejemplo 2-4 del Capítulo 10.)

Ejemplo 1-2: Sea $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito cualquiera totalmente ordenado. Se puede entonces escribir

$$V = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}$$

donde los a_{i_j} son los elementos originales reordenados según el orden. Se ve que V es bien ordenado. Nótese, además, que cualquier conjunto totalmente ordenado de n elementos

$$W = \{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}\}$$

es isomorfo al V.

A la vista del Ejemplo 1-2 se establece el

Teorema 11-3: Todos los conjuntos finitos totalmente ordenados que tienen el mismo número de elementos son bien ordenados y son isomorfos entre sí.

INDUCCION TRANSFINITA

Es bien conocido el

Principio de inducción matemática

Dado un subconjunto S de N, los números naturales, tal que

(1) $1 \in S$
(2) $n \in S$ implica $n + 1 \in S$,

resulta ser S el conjunto de los números naturales (es decir, $S = N$).

Este principio es uno de los axiomas de Peano para los números naturales, pero se le puede demostrar como consecuencia de ser N bien ordenado. Y de hecho, para todo conjunto bien ordenado es válido un principio análogo.

Principio de inducción transfinita

Dado un subconjunto S de un conjunto bien ordenado A tal que

(1) $a_0 \in S$

(2) $s(a) \subset S$ implica $a \in S$,

entonces $S = A$.

Aquí es a_0 el primer elemento de A y $s(a)$, llamado *sección inicial* de a, se define como el conjunto de elementos de A estrictamente anteriores a a.

ELEMENTOS LIMITE

Un elemento b de un conjunto ordenado A se llama *siguiente* de un elemento $a \in A$, y el a se llama *precedente* del b, si $a \prec b$ y no existe ningún elemento $c \in A$ tal que

$$a \prec c \prec b$$

Ejemplo 2-1: Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado como sigue.



Entonces b es siguiente tanto de d como de e, y e es precedente tanto de b como de c.

Ejemplo 2-2: Sea el conjunto Q de los números racionales. Ningún elemento de Q tiene siguiente ni precedente. Pues si $a, b \in Q$, con $a < b$, por ejemplo, entonces $(a + b)/2 \in Q$ y

$$a < (a + b)/2 < b$$

Ejemplo 2-3: Sea A un conjunto bien ordenado y sea $M(a)$ el conjunto de los elementos estrictamente superiores a $a \in A$. Si $M(a) \neq \emptyset$, es decir, si a no es un último elemento, entonces $M(a)$ tiene un primer elemento b que es el siguiente de a.

El Ejemplo 2-3 sugiere el

Teorema 11-4: Todo elemento de un conjunto bien ordenado tiene un siguiente, excepto el último elemento.

No vale, en cambio, proposición análoga al Teorema 11-4 en cuanto a los precedentes, pues existen elementos bien ordenados en los cuales hay elementos, distintos del primero, que carecen de elemento precedente.

Ejemplo 2-4: Sean $D = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Entonces en el conjunto bien ordenado

$$\{D; E\} = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6, \ldots\}$$

se ve que ni 1 ni 2 tienen precedente.

Observación 11-1: Aquí y en lo que sigue, $\{D; E\}$ denota el conjunto $D \cup E$ ordenado de izquierda a derecha, esto es, que todo elemento de D es anterior a todo elemento de E y que entre los elementos de cada conjunto se guarda el mismo orden.

A la vista del ejemplo anterior, se hace la

Definición 11-2: Se llama *elemento límite* en un conjunto bien ordenado, un elemento distinto del primero y que no tiene precedente.

SECCION INICIAL

Sea A un conjunto bien ordenado. La *sección inicial* $s(a)$ de un elemento $a \in A$ es el conjunto de todos los elementos de A estrictamente superiores a a. Es decir,

$$s(a) = \{x \mid x \in A, x \prec a\}$$

Es claro que $s(a)$ es un subconjunto de A.

Ejemplo 3-1: Sean $D = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Sea el conjunto bien ordenado

$$\{D; E\} = \{1, 3, 5, \ldots; 2, 4, 6, \ldots\}$$

Entonces $s(1) = \emptyset$, $s(5) = \{1, 3\}$, $s(2) = \{1, 3, 5, \ldots\}$, y $s(8) = \{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6\}$

En el teorema siguiente se enuncia una propiedad fundamental de las secciones iniciales

Teorema 11-5: Sea $S(A)$ la familia de todas las secciones iniciales de elementos de un conjunto bien ordenado A, y supóngase $S(A)$ ordenado por inclusión. A es entonces isomorfo a $S(A)$, y en particular, la función $f: A \to S(A)$ definida por $f: x \to s(x)$ es un isomorfismo de A en $S(A)$.

ISOMORFISMO ENTRE UN CONJUNTO BIEN ORDENADO Y SUS SUBCONJUNTOS

Sean los números naturales N y el subconjunto $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ de N. La función $f: N \to E$ definida por $f(x) = 2x$ es un isomorfismo de N en su subconjunto E. Nótese que, para todo $x \in N$,

$$x \precsim f(x)$$

propiedad que es cierta en general.

Teorema 11-6: Sea A un conjunto bien ordenado, sea B un subconjunto de A y sea la función $f: A \to B$ un isomorfismo de A en B. Entonces, para todo $a \in A$,

$$a \precsim f(a)$$

Las importantes propiedades que siguen de los conjuntos bien ordenados son consecuencia del teorema anterior.

Teorema 11-7: Si dos conjuntos bien ordenados A y B son isomorfos, existe un único isomorfismo de A en B.

Teorema 11-8: Un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a una de sus secciones iniciales.

COMPARACION DE CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

El teorema siguiente establece una importante relación entre dos conjuntos bien ordenados cualesquiera:

Teorema 11-9: Dados dos conjuntos bien ordenados A y B, o bien son isomorfos entre sí o bien uno de ellos es isomorfo a una sección inicial del otro.

Si un conjunto bien ordenado A es equivalente a una sección inicial de un conjunto bien ordenado B, se dice que A es *más corto* que B o que B es *más largo* que A. Con estas definiciones, el Teorema 11-9 se puede enunciar en esta nueva forma:

Teorema 11-9': Sean a A y B bien ordenados; entonces A es más corto que B, A es isomorfo a B o A es más largo que B.

Este teorema se puede reforzar como sigue:

Teorema 11-10: Si $\mathscr{A}$ es una familia de conjuntos bien ordenados no isomorfos dos a dos, existe un conjunto $A \in \mathscr{A}$ que es más corto que cualquier otro conjunto de $\mathscr{A}$.

Ejemplo 4-1: Sean los dos conjuntos finitos bien ordenados:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \quad y \quad B = b_1, \ldots, b_m\}$$

Si $n < m$, A es isomorfo al segmento inicial $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de B; sería entonces A más corto que B. Del mismo modo, si $n > m$ sería A más largo que B.

Ejemplo 4-2: Obsérvese que $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es más corto que el conjunto bien ordenado

$$\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\}$$

puesto que es isomorfo a la sección inicial $\{1, 3, 5, \ldots\}$

NUMEROS ORDINALES

Recordando otra vez que, según el Teorema 10-2, la relación definida entre conjuntos ordenados por

$$A \simeq B$$

o isomorfismo de conjuntos, es una relación de equivalencia, y que por el teorema fundamental sobre relaciones de equivalencia todos los conjuntos ordenados, y en particular los bien ordenados, quedan repartidos en clases disjuntas de conjuntos isomorfos, se tiene entonces la

Definición 11-3: *Dado un conjunto bien ordenado A, la familia λ de los conjuntos bien ordenados isomorfos a A se llama número ordinal de A* y se escribe

$$\lambda = \text{ord}(A)$$

Definición 11-4: El número ordinal de cada uno de los conjuntos bien ordenados

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots$$

se denota por 0, 1, 2, 3, ..., respectivamente, y se dice número ordinal *finito*. Todos los demás ordinales se llaman números *transfinitos*.

Definición 11-5: El número ordinal de los números naturales se denota por

$$\omega = \text{ord}(N)$$

Observación 11-2: Si bien se emplean los mismos símbolos 0, 1, 2, 3, ... para denotar números naturales, números cardinales, y ahora numeros ordinales, el significado particular que tengan tales símbolos lo indicará el contexto en que aparezcan. Por otra parte, como, según el Teorema 11-3, dos conjuntos finitos bien ordenados del mismo número de elementos son isomorfos, 0, 1, 2, ... son los únicos números ordinales finitos.

Dada la definición de tipo ordinal de un conjunto totalmente ordenado, vista en el capítulo anterior, la Definición 11-3 se puede enunciar en esta nueva forma:

Definición 11-3': *Si λ es el tipo ordinal de un conjunto ordenado A, y si A es bien ordenado, λ se llama número ordinal.*

DESIGUALDADES Y NUMEROS ORDINALES

Puede definirse como sigue una relación de desigualdad entre números ordinales.

Definición 11-6: Si λ y μ son dos números ordinales, y si A y B son dos conjuntos bien ordenados tales que

$$\lambda = \text{ord}(A) \quad \text{y} \quad \mu = \text{ord}(B)$$

es

$$\lambda < \mu$$

si A es isomorfo a una sección inicial de B.

O sea que con $\lambda = \text{ord}(A)$ y $\mu = \text{ord}(B)$,

$\lambda < \mu$ si A es más corto que B
$\lambda = \mu$ si A es isomorfo a B
$\lambda > \mu$ si A es más largo que B
$\lambda \leq \mu$ si $\lambda < \mu$ o $\lambda = \mu$
$\lambda \geq \mu$ si $\lambda > \mu$ o $\lambda = \mu$

Ejemplo 5-1: Sean los dos conjuntos finitos bien ordenados

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad y \quad B = \{b_1, \ldots, b_m\}$$

ordenados de izquierda a derecha. Si $n \leq m$, entonces A es isomorfo a la sección inicial $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de B. Con lo que $\text{ord}(A) \leq \text{ord}(B)$.

Esto es, que si $n \leq m$ como números ordinales, si, y solamente si, $n \leq m$ como números naturales. De modo que la relación de desigualdad entre números ordinales es una generalización de la relación de desigualdad en el conjunto de los números naturales.

Ejemplo 5-2: Sea $\lambda = \text{ord}(\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\})$. Como N, los números naturales, es isomorfo a la sección inicial $\{1, 3, 5, \ldots\}$,

$$\omega < \lambda$$

El teorema que sigue es una consecuencia directa del Teorema 11-9 y de la definición anterior

Teorema 11-11: Todo conjunto de números ordinales queda totalmente ordenado por la relación $\lambda \leq \mu$.

A la vista del Teorema 11-10, el teorema anterior se puede reforzar así:

Teorema 11-12: Todo conjunto de números ordinales es bien ordenado por la relación $\lambda \leq \mu$

Sean ahora λ un número ordinal y $s(\lambda)$ el conjunto de números ordinales menores que λ. Según el teorema anterior, $s(\lambda)$ es bien ordenado y, por tanto, ord $(s(\lambda))$ existe. ¿Qué relación habrá entre λ y ord $(s(\lambda))$? El teorema que sigue responde a esta pregunta.

Teorema 11-13: Si $s(\lambda)$ es el conjunto de ordinales menores que el ordinal λ, es $\lambda = \text{ord}\,(s(\lambda))$.

Observación 11-3: Como los números ordinales son bien ordenados, todo ordinal tiene un siguiente. Algunos ordinales no nulos, como, por ejemplo, ω, no tienen precedente; tales números se llaman *números ordinales límite* o simplemente *números límite*.

ADICION ORDINAL

Para los ordinales se define una operación de *adición* como sigue:

Definición 11-7: Sean λ y μ números ordinales tales que $\lambda = \text{ord}\,(A)$ y $\mu = \text{ord}\,(B)$, siendo A y B disjuntos. Entonces

$$\lambda + \mu = \text{ord}\,(\{A; B\})$$

Ejemplo 6-1: Nótese que con $\omega = \text{ord}(\{1, 2, \ldots\})$ y $n = \text{ord}(\{a_1, \ldots, a_n\})$ se tiene

$$n + \omega = \text{ord}\,(\{a_1, \ldots, a_n;\ 1, 2, \ldots\}) = \omega$$

Pero

$$\omega + n = \text{ord}\,(\{1, 2, \ldots, a_1, \ldots, a_n\}) > \omega$$

ya que N es equivalente a $S(a_1)$, la sección inicial de a_1.

Así, pues, por el Ejemplo 6-1, se ve que la operación de adición de números ordinales no es conmutativa. Pero sí se verifica que:

Teorema 11-14: (1) La adición de números ordinales es asociativa:

$$(\lambda + \mu) + \eta = \lambda + (\mu + \eta)$$

(2) El ordinal 0 es un elemento aditivo neutro:

$$0 + \lambda = \lambda + 0 = \lambda$$

Ejemplo 6-2: En este ejemplo se denotarán los ordinales finitos por

$$0^*, 1^*, 2^*, \ldots$$

Sean ahora dos conjuntos finitos disjuntos bien ordenados

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \quad y \quad B = \{b_1, \ldots, b_m\}$$

Entonces

$$n^* + m^* = \text{ord}(A) + \text{ord}(B) = \text{ord}(\{A;\ B\}) = (n+m)^*$$

Así que la operación de adición de ordinales finitos corresponde a la operación de adición de números naturales

Recuérdese otra vez que el conjunto de los números ordinales es el mismo un conjunto bien ordenado, así que cada ordinal tiene un siguiente Para los ordinales finitos, o sea para los números naturales, se ve claramente que $n+1$ es el siguiente de n El teorema que sigue establece la certeza general de esta propiedad

Teorema 11-15: Si λ es un número ordinal, $\lambda + 1$ es el siguiente de λ

La adición de números reales, y, por tanto, la de los números naturales, es una operación binaria que se puede generalizar por inducción a una suma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

finita de sumandos reales La suma de un número infinito de números reales, como por ejemplo,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

carece de significado (a menos que se introduzcan los conceptos sobre límites) Y, en cambio, sí es posible definir la suma de un número infinito de números ordinales como sigue

Sea $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ un conjunto bien ordenado, finito o infinito, de números ordinales Es decir, I es un conjunto bien ordenado y a cada $i \in I$ corresponde un número ordinal λ_i. Y sea

$$\lambda_i = \text{ord}(A_i)$$

Entonces la familia de conjuntos $\{A_i \times \{i\}\}_{i \in I}$ es una familia bien ordenada de conjuntos bien ordenados disjuntos dos a dos. Por el Teorema 11-2

$$\cup_{i \in I} \{A_i \times \{i\}\}$$

es un conjunto bien ordenado. Por consiguiente, queda establecido que

Definición 11-8: Sea $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ un conjunto bien ordenado de números ordinales $\lambda_i = \text{ord}(A_i)$ Entonces

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \text{ord}(\cup_{i \in I} \{A_i \times \{i\}\})$$

Ejemplo 6-3: Según la anterior definición $1 + 1 + 1 + \cdots = \omega$ Más aún, para todo λ_i finito (y diferente de 0) se tiene

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots = \sum_{i \in N} \lambda_i = \omega$$

MULTIPLICACION ORDINAL

Se define como sigue una operación de multiplicación para números ordinales

Definición 11-9: Si λ y μ son números ordinales tales que $\lambda = \text{ord}(A)$ y $\mu = \text{ord}(B)$, entonces

$$\lambda\mu = \text{ord}(\{A \times B\})$$

donde $\{A \times B\}$ está ordenado en *orden lexicográfico inverso*

Nótese que $\{A \times B\}$ ordenado en orden lexicográfico inverso quiere decir que

$$(a, a') \prec (b, b') \quad \text{si} \quad a' \prec b' \text{ o } a' = b' \text{ pero } a \prec b$$

Observación 11-4: Si no se advierte otra cosa, el conjunto producto $\{A \times B\}$ de dos conjuntos bien ordenados A y B ha de ponerse en orden lexicográfico inverso

Ejemplo 7-1: Teniendo en cuenta que $2 = \text{ord}(\{a, b\})$ y que $\omega = \text{ord}(\{1, 2, 3, \ldots\})$, entonces

$$2\omega = \text{ord}\,(\{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), \ldots, (a, n), (b, n), \ldots\}) = \omega$$

Pero

$$\omega 2 = \text{ord}\,(\{(1, a), (2, a), \ldots ; (1, b), (2, b), \ldots\}) > \omega$$

pues que N es isomorfo a la sección inicial $\{(1, a), (2, a), \ldots\}$.

Se ve, pues, que la operación de multiplicación de números ordinales no es conmutativa. Sin embargo, sigue siendo válido que

Teorema 11-16: (1) La multiplicación es asociativa:

$$\lambda(\mu\eta) = (\lambda\mu)\eta$$

(2) La multiplicación es distributiva a la izquierda respecto de la adición

$$\lambda(\mu + \eta) = \lambda\mu + \lambda\eta$$

(3) El ordinal 1 es un elemento multiplicativo neutro:

$$1\lambda = \lambda 1 = \lambda$$

ESTRUCTURA DE LOS NUMEROS ORDINALES

Escribiendo los números ordinales según su orden, primero vienen los ordinales finitos

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

y luego el primer ordinal límite ω y sus siguientes

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots$$

Nótese (véase el Ejemplo 7-1) que ord $(\{0, 1, 2, \ldots ; \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}) = \omega 2$. Así que en seguida vienen el segundo ordinal límite $\omega 2$ y sus siguientes

$$\omega 2,\ \omega 2 + 1,\ \omega 2 + 2,\ \omega 2 + 3,\ \ldots$$

El número límite que sigue es $\omega 3$. Se prosigue así:

$$\omega 3,\ \omega 3 + 1,\ \ldots,\ \omega 4,\ \ldots,\ \omega 5,\ \ldots,\ \ldots,\ \omega\omega = \omega^2$$

siendo $\omega\omega = \omega^2$ el número límite que sigue a los números límites ωn, con $n \in N$. Continuando,

$$\omega^2, \omega^2 + 1,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega 2,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega 3,\ \ldots,\ \ldots,\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 2$$

Después

$$\omega^2 2,\ \ldots,\ \omega^2 3,\ \ldots,\ \omega^2 4,\ \ldots,\ \omega^2\omega = \omega^3$$

Luego están las potencias de ω:

$$\omega^3, \omega^3 + 1,\ \ldots,\ \omega^4,\ \ldots,\ \omega^5,\ \ldots,\ \ldots,\ \omega^\omega$$

Aquí ω^ω es el número límite que sigue a los números límite ω^n, con $n \in N$. Prosiguiendo:

$$\omega^\omega,\ \ldots,\ (\omega^\omega)^\omega,\ \ldots,\ ((\omega^\omega)^\omega)^\omega,\ \ldots,\ \ldots$$

Después de todos estos ordinales se tiene el ordinal ϵ_0. Continuando:

$$\epsilon_0, \epsilon_0 + 1,\ \ldots$$

Cada uno de los números ordinales que se han enumerado es, a su vez, el número ordinal de un conjunto enumerable.

CONSTRUCCION AUXILIAR DE LOS NUMEROS ORDINALES

Recuérdese el

Teorema 11-13: Si $s(\lambda)$ es el conjunto de números ordinales anteriores a λ se tiene

$$\lambda = \text{ord}\,(s(\lambda))$$

Algunos autores utilizan esta propiedad de los números ordinales justamente como definición de dichos números. Dicho sencillamente: un número ordinal es el conjunto de los números ordinales que le preceden. Así, pues,

Definición:

$0 \equiv \emptyset$
$1 \equiv \{0\}$
$2 \equiv \{0, 1\}$
$3 \equiv \{0, 1, 2\}$
.
$\omega \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\omega + 1 \equiv \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$

$\omega + 2 \equiv \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$
.
.
.
$\omega 2 \equiv \{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\}$
$\omega 2 + 1 \equiv \{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega 2\}$
.
.
.

Una de las principales razones para desarrollar los numeros ordinales, como aquí aparece en esta definición, es el evitar ciertas contradicciones inherentes a la construcción de los numeros ordinales, como se hizo en lo que precede (véase Capítulo 13).

Problemas resueltos

1. Demostrar el principio de inducción transfinita. Dado un subconjunto S de un conjunto bien ordenado A con las propiedades siguientes: (1) $a_0 \in S$, (2) $s(a) \subset S$ implica $a \in S$, se sigue que $S = A$.

Solución:

Supongase $S \neq A$ o sea que $A - S = T$ no es vacío. Como A es bien ordenado, T tiene un primer elemento t_0. Todo elemento $x \in s(t_0)$ es anterior a t_0 y, por tanto, no puede pertenecer a T perteneciendo entonces a S, así que $S(t_0) \subset S$. Por (2), $t_0 \in S$. Esto se contradice con lo de ser $t_0 \in A - S$. De modo que la suposición del principio de que $S \neq A$ no es cierta, o sea que $S = A$. (Obsérvese que en realidad (1) es consecuencia de (2) puesto que $\emptyset = s(a_0)$ es un subconjunto de S y, por tanto, implica $a_0 \in S$.)

2. Demostrar el Teorema 11-5: Si $S(A)$ es la familia de todas las secciones iniciales de elementos de un conjunto bien ordenado A, y $S(A)$ está ordenado por inclusión, entonces A es isomorfo a $S(A)$ y, en particular, la función $f: A \to S(A)$ definida por $f: x \to s(x)$ es un isomorfismo de A en $S(A)$.

Solución:

Por definición, f es sobreyectiva. Para demostrar que es inyectiva, supóngase que $x \neq y$, entonces uno de ellos, por ejemplo, x, es estrictaménte anterior al otro, así, pues $x \in s(y)$. Pero, por la definición de sección inicial, $x \notin s(x)$. Así que $s(x) \neq s(y)$, y entonces f es inyectiva.

Para demostrar que f preserva el orden, o sea que

$$x \precsim y \text{ si, y solo si, } s(x) \subset s(y)$$

supóngase $x \precsim y$. Si $a \in s(x)$, entonces $a \prec x$ y, por tanto, $a \prec y$, con lo que $a \in s(y)$. Como $a \in s(x)$ implica $a \in s(y)$, $s(x)$ es un subconjunto de $s(y)$. Suponiendo ahora $x \not\precsim y$, o sea que $x \succ y$, entonces $y \in s(x)$. Pero, por la definición de sección inicial, $y \notin s(y)$, y entonces $s(x) \not\subset s(y)$. Es decir, $x \precsim y$ si, y solamente si, $s(x) \subset s(y)$.

3. Demostrar el Teorema 11-6: Si A es un conjunto bien ordenado, B es un subconjunto de A y $f: A \to B$ es un isomorfismo de A en B, entonces, para todo $a \in A$, $a \precsim f(a)$.

Solución:

Sea $D = \{x \mid f(x) \prec x\}$. Si D es vacío, el teorema es cierto. Si $D \neq \emptyset$, entonces, como A es bien ordenado, D tiene un primer elemento d_0. Nótese que $d_0 \in D$ implica $f(d_0) \prec d_0$. Como f es un isomorfismo,

$$f(d_0) \prec d_0 \quad \text{implica} \quad f(f(d_0)) \prec f(d_0)$$

En consecuencia, $f(d_0)$ también pertenece a D. Pero $f(d_0) \prec d_0$ y $f(d_0) \in D$ está en contradicción con lo de ser d_0 el primer elemento de D. Lo que significa que la suposición previa de que $D \neq \emptyset$ lleva a una contradicción. Por tanto, D es vacío y el teorema es cierto.

4. Demostrar el Teorema 11-7: Si A y B son conjuntos bien ordenados isomorfos, hay un isomorfismo único de A en B.

Solución:

Sean $f: A \to B$ y $g: A \to B$ sendos isomorfismos. Supóngase $f \neq g$. Hay entonces un elemento $x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$. En consecuencia, o bien $f(x) \prec g(x)$, o bien $g(x) \prec f(x)$. Sea $f(x) \prec g(x)$.
Como $g: A \to B$ es un isomorfismo, $g^{-1}: B \to A$ tambien lo ės. Además, $g^{-1} \circ f: A \to A$, producto de composicion de dos isomorfismos, es un isomorfismo. Pero

$$f(x) \prec g(x) \quad \text{implica} \quad (g^{-1} \circ f)(x) \prec (g^{-1} \circ g)(x) = x$$

Se tiene así que $g^{-1} \circ f$ es un isomorfismo y que $(g^{-1} \circ f)(x) \prec x$. Lo cual contradice el Teorema 11-6. De manera que la suposicion de que $f \neq g$ lleva a una contradicción y no puede haber, pues, más que un unico isomorfismo de A en B.

5. Demostrar el Teorema 11-8: Un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a una seccion inicial suya.

Solución:

Sean A un conjunto bien ordenado y $f: A \to s(a)$ un isomorfismo de A en una de sus secciones iniciales. Entonces $f(a) \in s(a)$. Por tanto,

$$f(a) \prec a$$

lo que contradice el Teorema 11-6. A no puede ser, pues, isomorfo a una de sus secciones iniciales.

6. Demostrar que si A es un conjunto bien ordenado y S es un subconjunto de A tal que

$$a \precsim b \text{ y } b \in S \text{ implica } a \in S$$

entonces $S = A$ o bien S es una sección inicial de A.

Solución:

Supóngase $S \neq A$. $A - S$ tiene entonces un primer elemento a_0 y claro es que $a_0 \notin S$. Para demostrar que $S = s(a_0)$, sea $x \prec a_0$; entonces $x \notin A - S$, es decir, $x \in S$; luego $s(a_0) \subset S$.

Supóngase ahora que $y \notin s(a_0)$, es decir, que $a_0 \precsim y$. Pero

$$y \in S \quad \text{y} \quad a_0 \precsim y \quad \text{implica} \quad a_0 \in S$$

lo cual contradice el que $a_0 \notin S$. Luego $y \notin S$.

Es decir, $y \notin s(a_0)$ implica $y \notin S$, lo cual significa que $S \subset s(a_0)$. Por tanto, $S = s(a_0)$.

7. Demostrar que dos secciones iniciales de un conjunto bien ordenado no pueden ser isomorfas.

Solución:

Sean $s(a)$ y $s(b)$ dos secciones iniciales distintas, o sea que $a \neq b$. O bien $a \prec b$, o bien $b \prec a$, sea $a \prec b$. Entonces $s(a)$ es una sección inicial del conjunto bien ordenado $s(b)$. Por consiguiente, según el Teorema 11-8, $s(b)$ no es isomorfa a $s(a)$.

8. Demostrar: Sean A y B bien ordenados, y sea la sección inicial $s(a)$ de A isomorfa a una sección inicial de B. Entonces $s(a)$ es isomorfa a una sección inicial única $s(b)$ de B.

Solución:

Sean $s(a) \simeq s(b)$ y $s(a) \simeq s(b')$ con $b, b' \in B$. Entonces $s(b) \simeq s(b')$. Por el Problema 7, $s(b) = s(b')$, y por tanto, $b = b'$.

9. Demostrar que si A y B son bien ordenados y tales que una sección inicial $s(a)$ de A es isomorfa a una sección inicial $s(b)$ de B, entonces toda sección inicial de $s(a)$ es isomorfa a una sección inicial de $s(b)$, es decir,

$$a' \precsim a \text{ implica } s(a') \simeq s(b') \text{ donde } b' \precsim b$$

Y además que, si $f: s(a) \to s(b)$ es el isomorfismo de $s(a)$ en $s(b)$, entonces la restricción de f a $s(a')$ es el isomorfismo de $s(a')$ en $s(b') = f(s(a'))$.

Solución:

Sea $f(a') = b'$. Nótese que la restricción de f a $s(a')$ es inyectiva y que preserva el orden, de modo que $s(a') \simeq f(s(a'))$.

Además, como f es un isomorfismo

$$a^* \prec a' \quad \text{si, y solo si,} \quad f(a^*) \prec b'$$

Así que $f(s(a')) = s(b')$ y, por tanto, $s(a') \simeq s(b')$.

10. Demostrar que si A y B son bien ordenados y

$$S = \{x \mid x \, \varepsilon \, A, \ s(x) \simeq s(y) \text{ donde } y \, \varepsilon \, B\}$$

[es decir, si cada elemento $x \, \varepsilon \, S$ es tal que su sección inicial $s(x)$ es isomorfa a una sección inicial $s(y)$ de B], entonces $S = A$ o bien S es una sección inicial de A.

Solución:

Sean $x \, \varepsilon \, S$ e $y \precsim x$. Por el Problema 9, $s(y)$ es isomorfa a una sección inicial de B, luego $y \, \varepsilon \, S$. O sea que

$$y \precsim x \text{ y } x \, \varepsilon \, S \quad \text{implica} \quad y \, \varepsilon \, S$$

Por el Problema 6, $S = A$ o bien S es una sección inicial de A.

11. Demostrar que si A y B son bien ordenados y

$$S = \{x \mid x \, \varepsilon \, A, \ s(x) \simeq s(y) \text{ donde } y \, \varepsilon \, B\}$$
$$T = \{y \mid y \, \varepsilon \, B, \ s(y) \simeq s(x) \text{ donde } x \, \varepsilon \, A\}$$

entonces S es isomorfo a T.

Solución:

Sea $x \, \varepsilon \, S$. Entonces, por el Problema 8, $s(x)$ es isomorfa a una sección única $s(y)$ de B. Así, a cada $x \, \varepsilon \, S$ corresponde un único $y \, \varepsilon \, T$ tal que $s(x) \simeq s(y)$ y viceversa. Por tanto, la función $f: S \to T$ definida por

$$f(x) = y \quad \text{si} \quad s(x) \simeq s(y)$$

es inyectiva y sobreyectiva.

Sean ahora $x', x \, \varepsilon \, S$, $f(x) = y$, $f(x') = y'$ y $x' \prec x$. El teorema queda demostrado si se prueba que $y' \prec y$, esto es, que f preserva el orden.

Sea $\varnothing : s(x) \to s(y)$ el isomorfismo de $s(x)$ en $s(f(x)) = s(y)$. Según el Problema 9, $\varnothing$ en su restricción a $s(x')$ es un isomorfismo de $s(x')$ en la sección inicial $s(\varnothing(x'))$ de B. Pero, por el Problema 8, solo hay un isomorfismo único de $s(x')$ en B. En consecuencia, $\varnothing(x') = f(x') = y'$. Como $\varnothing(x') \, \varepsilon \, s(y)$,

$$\varnothing(x') = y' \prec y$$

Por tanto, S es isomorfo a T.

12. Demostrar el Teorema 11-9: Si A y B son bien ordenados, o bien A es más corto que B, o bien A es isomorfo a B, o bien A es más largo que B.

Solución:

Sean S y T definidos como en el problema anterior. Nótese que $S \simeq T$. Por el Problema 10, hay cuatro posibilidades

Caso I. $S = A$ y $T = B$. A es entonces isomorfo a B.

Caso II. $S = A$ y $T = s(b)$, una sección inicial de B. Entonces A es más corto que B.

Caso III. $T = B$ y $S = s(a)$, una sección inicial de A. Entonces A es más largo que B.

Caso IV. $S = s(a)$ y $T = s(b)$. Entonces $a \, \varepsilon \, S$ puesto que su sección inicial $s(a)$ es isomorfa a una sección inicial $s(b)$ de B. Pero a no puede pertenecer a su propia sección inicial; luego este caso es imposible.

Por tanto, el teorema es cierto.

13. Demostrar: Sea $\mathscr{A}$ una familia de secciones iniciales de un conjunto bien ordenado A. Hay entonces una sección inicial $s(a) \in \mathscr{A}$ tal que $s(a) \subset s(x)$ para cualquier otra sección inicial $s(x)$ de $\mathscr{A}$, es decir, hay una sección inicial $s(a) \in \mathscr{A}$ que es más corta que cualquier otra sección inicial de $\mathscr{A}$

Solución:

Por el Teorema 11-5, A es isomorfo a $S(A)$, la familia de todas las secciones iniciales de elementos de A, ordenada por inclusión. Como A es bien ordenado, $S(A)$ también lo es. En consecuencia, $\mathscr{A}$, un subconjunto de $S(A)$, tiene un primer elemento $s(a)$. Por tanto, $s(a) \subset s(x)$ para cualquier otra seccion inicial $s(x) \in \mathscr{A}$

14. Demostrar el Teorema 11-10: Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos bien ordenados no isomorfos dos a dos. Existe entonces un conjunto $A_0 \in \mathscr{A}$ tal que A_0 es más corto que cualquier otro conjunto de $\mathscr{A}$

Solución:

Sea B un conjunto de $\mathscr{A}$. Defínase

$$\mathscr{B} = \{X \mid X \in \mathscr{A},\ X \text{ es más corto que } B\}$$

Si $\mathscr{B}$ es vacío, entonces B cumple los requisitos del teorema. Supóngase $\mathscr{B} \neq \varnothing$. Demostrando que $\mathscr{B}$ posee un conjunto A_0 más corto que los otros, entonces, si se considera cómo se definió $\mathscr{B}$, es A_0 el conjunto más corto de $\mathscr{A}$

Ahora bien, por el Teorema 11-9, todo conjunto $A \in \mathscr{B}$ es isomorfo a una sección inicial $s(a)$ de B. Sea $\mathscr{B}'$ la familia de las secciones iniciales de B que son isomorfas a un conjunto de $\mathscr{B}$. Por el Problema 13, $\mathscr{B}'$ contiene una sección inicial $s(a_0)$ que es más corta que cualquier otra sección inicial de $\mathscr{B}'$. En consecuencia, el conjunto $A_0 \in \mathscr{B}$ que es isomorfo a $s(a_0)$, es más corto que cualquier otro conjunto de $\mathscr{B}$

Así que A_0 cumple los requisitos del teorema

NUMEROS ORDINALES

15. Demostrar: si $\lambda = \text{ord}(A)$ y $\mu < \lambda$, hay una sección inicial única $s(a)$ de A tal que $\mu = \text{ord}(s(a))$.

Solución:

Sea $\mu = \text{ord}(B)$. Como $\mu < \lambda$, B es más corto que A, esto es, B es isomorfo a una sección inicial $s(a)$ de A. Por tanto, $\mu = \text{ord}(s(a))$. Además, $s(a)$ es la única sección inicial cuyo número ordinal es μ puesto que, segun el Problema 7, dos secciones iniciales distintas de A no pueden ser isomorfas.

16. Demostrar el Teorema 11-13: Sea $s(\lambda)$ el conjunto de los ordinales menores que el ordinal λ. Entonces $\lambda = \text{ord}(s(\lambda))$.

Solución:

Sean $\lambda = \text{ord}(A)$ y $S(A)$ la familia de las secciones iniciales de A, ordenada por inclusión. Por el Teorema 11-15, $A \simeq S(A)$; con que $\lambda = \text{ord}(S(A))$. Para demostrar el teorema bastará demostrar que $s(\lambda)$ es isomorfa a $S(A)$.

Sea $\mu \in s(\lambda)$, entonces $\mu < \lambda$. Por el Problema 15, hay una sección inicial unica $s(a)$ de A tal que $\mu = \text{ord}(s(a))$. Por tanto, la función $f: s(\lambda) \to S(A)$ definida por

$$f(\mu) = s(a) \quad \text{si} \quad \mu = \text{ord}(s(a))$$

es inyectiva. Además, f es sobreyectiva, pues si es $s(b) \in S(A)$, entonces $s(b)$ es más corta que A y, por tanto, $\text{ord}(s(b)) = \eta < \text{ord}(A) = \lambda$, esto es, $\eta \in s(\lambda)$, luego $f(\eta) = s(b)$.

Para completar la demostración del teorema, solo falta demostrar que f preserva el orden; pues entonces f es un isomorfismo y $s(\lambda) \simeq S(A)$. Sea $\mu < \eta$, donde $\mu, \eta \in s(\lambda)$. Entonces $\mu = \text{ord}(s(a))$ y $\eta = \text{ord}(s(b))$, esto es, $f(\mu) = s(a)$ y $f(\eta) = s(b)$. Como $\mu < \eta$, $s(a)$ es una sección inicial de $s(b)$, luego $s(a)$ es un subconjunto propio de $s(b)$. O lo que es lo mismo, según el orden de $S(A)$, $s(a) < s(b)$. Así que f preserva el orden.

17. Demostrar el Teorema 11-15: Sea λ un número ordinal. Entonces $\lambda + 1$ es el siguiente de λ.

Solución:

Sea μ el siguiente de λ. Entonces, por la definición de $s(\mu)$,

$$s(\mu) = s(\lambda) \cup \{\lambda\}$$

Luego

$$\text{ord}(s(\mu)) = \text{ord}(s(\lambda)) + \text{ord}(\{\lambda\})$$

esto es, $\mu = \lambda + 1$.

18. Demostrar, dando un contraejemplo, que la ley distributiva a la derecha de la multiplicación respecto de la adición no se verifica en general entre números ordinales. Es decir, mostrar tres ordinales λ, μ y η tales que

$$(\lambda + \mu)\eta \neq \lambda\eta + \mu\eta$$

Solución:

Nótese, por el Ejemplo 7-1, que $(1 + 1)\omega = 2\omega = \omega$, y que (utilizando la ley distributiva a la izquierda)

$$1\omega + 1\omega = \omega + \omega = \omega 1 + \omega 1 = \omega(1+1) = \omega 2 > \omega$$

Por tanto, $(1 + 1)\omega \neq 1\omega + 1\omega$.

19. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia bien ordenada de conjuntos bien ordenados disjuntos dos a dos, y sea ord $(I) = \omega$ y ord $(A_i) = \omega$ para todo $i \in I$. Hallar ord $(\bigcup_{i \in I} A_i)$.

Solución:

$$\text{ord}\,(\cup_{i \in I} A_i) = \omega + \omega + \omega + \cdots = \omega(1 + 1 + 1 + \cdots) = \omega\omega \equiv \omega^2$$

20. Demostrar que $\omega + \omega = \omega 2$.

Solución:

Método 1. Nótese que

$$\omega + \omega = \omega 1 + \omega 1 = \omega(1 + 1) = \omega 2$$

Habiéndose empleado la ley distributiva a la izquierda

Método 2. Considérense los conjuntos bien ordenados

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots\}, \quad C = \{c_1, c_2, \ldots\}, \quad D = \{r, s\}$$

Obsérvese que

$$\omega = \text{ord}\,(A) = \text{ord}\,(B) = \text{ord}\,(C) \qquad \text{y} \qquad 2 = \text{ord}\,(D)$$

Entonces

$$\omega + \omega = \text{ord}\,(\{A;\ B\}) = \text{ord}\,(\{a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots\})$$
$$\omega 2 = \text{ord}\,(\{C \times D\}) = \text{ord}\,(\{(c_1, r), (c_2, r), \ldots;\ (c_1, s), (c_2, s), \ldots\})$$

Pero la función $f: \{A;\ B\} \to \{C \times D\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (c_i, r) & \text{si } x = a_i \\ (c_i, s) & \text{si } x = b_i \end{cases}$$

es un isomorfismo de $\{A;\ B\}$ en $C \times D$. Por tanto,

$$\omega + \omega = \text{ord}\,(\{A;\ B\}) = \text{ord}\,(\{C \times D\}) = \omega 2$$

Problemas propuestos

21. Demostrar el Teorema 11-1-2: Si A es un conjunto bien ordenado y B es isomorfo a A, entonces B es bien ordenado

22. Demostrar el Teorema 11-2: Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia bien ordenada de conjuntos bien ordenados disjuntos dos a dos, la unión de los conjuntos $\bigcup_{i \in I} A_i$ es bien ordenada.

23. Suponiendo que N, el conjunto de los números naturales, es bien ordenado, demostrar el principio de inducción matemática. Si S es un subconjunto de N tal que (1) $1 \in S$ y (2) $n \in S$ implica $n + 1 \in S$, entonces $S = N$

24. Demostrar que 0 es el elemento neutro para la adición de números ordinales, esto es que para todo ordinal λ, $0 + \lambda = \lambda + 0 = \lambda$

25. Demostrar que 1 es el elemento neutro para la multiplicación de números ordinales, esto es, que para todo ordinal λ, $1\lambda = \lambda 1 = \lambda$.

26. Demostrar: Si λ_i, $i \in N$, es un ordinal finito, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots = \sum_{i \in I} \lambda_i = \omega$.

27. Demostrar. Si λ es un ordinal infinito, entonces $\lambda = \mu + n$, siendo μ un número límite y n un ordinal finito.

28. Establecer la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones sobre ordinales. las ciertas, demostrarlas, y para las falsas, dar un contra-ejemplo.

(1) Si $\lambda \neq 0$, entonces $\mu < \lambda + \mu$.
(2) Si $\lambda \neq 0$, entonces $\mu < \mu + \lambda$.

29. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones sobre los ordinales; demostrar la verdad o dar un contra-ejemplo, en caso de falsedad.

(1) Si $\lambda \neq 0$ y $\mu < \eta$, entonces $\lambda + \mu < \lambda + \eta$.
(2) Si $\lambda \neq 0$ y $\mu < \eta$, entonces $\mu + \lambda < \eta + \lambda$.

30. Demostrar: La ley distributiva a la izquierda es válida para la multiplicación respecto de la adición de números ordinales, esto es, $\lambda(\mu + \eta) = \lambda\mu + \lambda\eta$.

Respuestas a los problemas propuestos

27. *Sugerencia:* Nótese que un conjunto bien ordenado no puede contener un subconjunto ordenado $A = \{ \quad a_3 \prec a_2 \prec a_1\}$ puesto que A no es bien ordenado.

28. (1) Falso, (2) Cierto.

29. (1) Cierto, (2) Falso.

Capítulo 12

Axioma de elección. Lema de Zorn. Teorema de la buena ordenación

PRODUCTOS CARTESIANOS Y FUNCIONES DE ELECCION

Definición 12-1: Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Entonces el producto cartesiano de los $\{A_i\}_{i \in I}$, que se denota por

$$\times_{i \in I} A_i$$

es el conjunto de todas las funciones de elección definidas sobre $\{A_i\}_{i \in I}$.

Recuérdese que una función $f: \{A_i\}_{i \in I} \to X$, donde $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X, se llama función de elección si $f(A_i) = a_i \in A_i$, para todo $i \in I$. En otras palabras, f «elige» un punto $a_i \in A_i$ de cada conjunto A_i.

Ejemplo 1-1: Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una familia finita de conjuntos. En el Capítulo 5 se definió el producto cartesiano de n conjuntos

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \equiv \times_{i=1}^{n} A_i$$

como el conjunto de n-tuples

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde $a_i \in A_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Pero a cada función de elección f definida sobre $\{A_1, \ldots, A_n\}$ corresponde el único n-tuple

$$(f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n))$$

y viceversa. Así, pues, en el caso finito, la Definición 12-1 coincide con la definición ya dada de producto cartesiano.

La razón principal para introducir la Definición 12-1 es que se aplica a cualquier familia de conjuntos: finita, enumerable o no enumerable. La definición anterior, que se basaba en el concepto de n-tuple, no se aplica sino a una familia finita de conjuntos.

Observación 12-1: Aunque una función de elección se define para una familia de subconjuntos, toda familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ se puede considerar como una familia de subconjuntos de su unión $\bigcup_{i \in I} A_i$.

AXIOMA DE ELECCION

El axioma de elección es fundamental para la matemática y, en particular, para la teoría de conjuntos. Este axioma de «apariencia inocente», que en seguida se expone, tiene como consecuencia algunos de los resultados más poderosos e importantes de la matemática.

Axioma de elección: El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos, no es vacío.

A la vista de la Definición 12-1, se puede establecer el axioma de elección como sigue.

Axioma de elección: Hay una función de elección para toda familia no vacía de conjuntos no vacíos.

El axioma de elección es equivalente al siguiente postulado:

Postulado de Zermelo: Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos disjuntos no vacíos. Existe entonces un subconjunto B de $\bigcup_{i \in I} A_i$ tal que la intersección de B y cada conjunto A_i consta de un elemento.

Obsérvese que en el postulado de Zermelo los conjuntos son disjuntos, en tanto que en el axioma de elección pueden no serlo.

LEMA DE ZORN

El lema de Zorn es uno de los más importantes instrumentos de la matemática; es una consecuencia del axioma de elección. El lema de Zorn establece la existencia de ciertos tipos de elementos, si bien no se da ningún procedimiento constructivo para hallar tales elementos.

Lema de Zorn: Sea A un conjunto no vacío parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado tiene un mayorante en A. A contiene entonces un elemento maximal por lo menos.

En Halmos, *Naive Set Theory*, hay una demostración del lema de Zorn que sólo utiliza el axioma de elección.

TEOREMA DE LA BUENA ORDENACION

El siguiente teorema se atribuye a Zermelo, quien lo demostró directamente con el axioma de elección.

Teorema de la buena ordenación: Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Se demostrará este teorema, primero con el axioma de elección, y luego con el lema de Zorn.

NUMEROS CARDINALES Y ORDINALES

A cada número ordinal $\lambda = \text{ord}\,(A)$ se puede asociar un número cardinal único $\alpha = \#\,(A)$. Llamando a este α número cardinal de λ, denotado por

$$\alpha = \bar{\lambda}$$

se ve que esta función de los números ordinales en los números cardinales no es inyectiva, es decir, que hay diferentes números ordinales con el mismo número cardinal. Por ejemplo,

$$\omega = \text{ord}\,(\{1, 2, 3, \ldots\})$$
$$\omega 2 = \text{ord}\,(\{a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots\})$$

son ambos números ordinales de conjuntos enumerables, esto es, *conjuntos con el mismo número cardinal* $\aleph_0$. Dicho de otra manera,

$$\bar{\omega} = \aleph_0 = \overline{\omega 2}$$

El teorema de la buena ordenación implica que la función anterior de los números ordinales en los números cardinales es sobreyectiva. Porque, suponiendo que $\alpha = \#\,(A)$ es un número cardinal cualquiera, por el teorema de la buena ordenación, A puede ser bien ordenado; sea $\lambda = \text{ord}\,(A)$. Entonces $\alpha = \bar{\lambda}$. Y α es el número cardinal de un número ordinal λ por lo menos. (Aquí, A se usa tanto para el conjunto mismo, como para el conjunto bien ordenado.)

Se establece fácilmente la siguiente correspondencia entre números ordinales y cardinales.

Teorema 12-1: Sean $\alpha = \bar{\lambda}$ y $\beta = \bar{\mu}$ números cardinales. Se tiene entonces

(1) $\alpha < \beta$ implica $\lambda < \mu$

(2) $\lambda < \mu$ implica $\alpha \leq \beta$

El resultado siguiente, ya mencionado, es una consecuencia directa del teorema de la buena ordenación

Teorema 9-11: (Ley de tricotomía): Sean α y β números cardinales. Una de las siguientes relaciones es cierta:

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta \text{ o } \alpha > \beta$$

Es decir, la relación de desigualdad definida en los números cardinales es un orden total y no solamente parcial Como los números cardinales están bien ordenados, se puede dar un enunciado más fuerte.

Teorema 12-2: Todo conjunto de números cardinales está bien ordenado por la relación $\alpha \preceq \beta$.

ALEFS

Ya se dijo antes que el número cardinal de los conjuntos enumerables es

$$\aleph_0$$

($\aleph$ alef es la primera letra del alfabeto hebreo.) Como los números cardinales forman un conjunto bien ordenado, se emplea el siguiente sistema de notación para los números cardinales. El siguiente de $\aleph_0$ se denota $\aleph_1$ y el siguiente a éste por $\aleph_2$, y así sucesivamente. El número cardinal que sigue a todos los $\aleph_n$ se denota por $\aleph_\omega$. O sea que todo cardinal infinito se puede denotar unívocamente por una $\aleph$ con un número ordinal como subíndice de la manera siguiente:

Notación: Sea α un número cardinal infinito. Sea $s(\alpha)$ el conjunto de los números cardinales infinitos inferiores a α. Nótese que $s(\alpha)$ es bien ordenado: sea $\lambda = \text{ord}\,(s(\alpha))$. Entonces α se denota por

$$\aleph_\lambda$$

La hipótesis del continuo se puede ahora enunciar así:

Hipótesis del continuo: $\aleph_1 = c$.

Problemas resueltos

AXIOMA DE ELECCION

1. Demostrar que el axioma de elección es equivalente al postulado de Zermelo.

Solución:

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos disjuntos no vacíos y sea f una función de elección sobre $\{A_i\}_{i \in I}$, y sea el conjunto $B = \{f(A_i) : i \in I\}$. Entonces

$$A_i \cap B = \{f(A_i)\}$$

consta de un solo elemento puesto que los A_i son disjuntos y f es una función de elección. De acuerdo con esto, el axioma de elección implica el postulado de Zermelo.

Sea ahora $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos disjuntos o no y hágase

$$A_i^* = \{A_i\} \times \{i\}, \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

Entonces es ciertamente $\{A_i^*\}$ una familia disjunta de conjuntos puesto que $i \neq j$ implica $A_i \times \{i\} \neq A_j \times \{j\}$ aun en el caso de ser $A_i = A_j$. Por el postulado de Zermelo, existe un subconjunto B de $\bigcup_i A_i^*$ tal que

$$B \cap A_i^* = \{(a_i, i)\}$$

consta de un solo elemento. Entonces $a_i \in A_i$ y la función f sobre $\{A_i\}_{i \in I}$ definida por $f(A_i) = a_i$ es una función de elección. Según lo cual, el postulado de Zermelo implica el axioma de elección.

2. Demostrar el teorema de la buena ordenación (Zermelo): Todo conjunto no vacío X puede ser bien ordenado.

Solución:

Sea f una función de elección sobre el conjunto $\mathscr{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X, esto es,

$$f: \mathscr{P}(X) \to X \quad \text{con} \quad f(A) \in A, \quad \text{para todo} \quad A \subset X$$

Un subconjunto A de X se dirá *normal* si tiene una buena ordenación y, además, la propiedad de que, para todo $a \in A$,

$$f(X - s_A(a)) = a \qquad \text{donde} \qquad s_A(a) = \{x \in A : x \prec a\}$$

es decir, $s_A(a)$ es la sección inicial de a en la ordenación que tiene A. Hay que demostrar que existen conjuntos normales. Haciendo

$$x_0 = f(X), \quad x_1 = f(X - \{x_0\}) \quad \text{y} \quad x_2 = f(X - \{x_0, x_1\})$$

resulta que $A = \{x_0, x_1, x_2\}$ es normal. Ahora bien, si A y B son subconjuntos normales de X, entonces $A = B$, o el uno es una sección inicial del otro. Como A y B son bien ordenados, uno de ellos, A, por ejemplo, es isomorfo a B o a una sección inicial de B (Teorema 11-9). Existe, pues, un isomorfismo $\alpha : A \to B$. Hágase

$$A^* = \{x \in A : \alpha(x) \neq x\}$$

Si A^* es vacío, entonces $A = B$ o bien A es una sección inicial de B. Suponiendo $A^* \neq \varnothing$, sea a_0 el primer elemento de A^*. Entonces $s_A(a_0) = s_B(\alpha(a_0))$. Pero siendo A y B normales,

$$a_0 = f(X - s_A(a_0)) = f(X - s_B(\alpha(a_0))) = \alpha(a_0)$$

Como esto contradice la definición de A^* es o bien $A = B$ o bien A es una sección inicial de B. En particular, si $a \in A$ y $b \in B$, o son $a, b \in A$, o son $a, b \in B$. Además, si $a, b \in A$ y $a, b \in B$, entonces $a \precsim b$ como elementos de A si, y solamente si, $a \precsim b$ como elementos de B.

Sea ahora Y el conjunto de los elementos de X que pertenecen a un conjunto normal por lo menos. Si $a, b \in Y$, entonces $a \in A$ y $b \in B$, donde A y B son normales y así, pues, como ya se vio antes, $a, b \in A$ o $a, b \in B$. Definiendo ahora un orden en Y de la siguiente manera: $a \precsim b$ como elementos de Y si, y solamente si, $a \precsim b$ como elementos de A o de B; este orden está bien definido es decir, es independiente de la elección particular de A y B y, además, es un orden total. Sea ahora Z un subconjunto no vacío de Y y sea a un elemento de Z. Entonces a pertenece a un conjunto normal A. Luego $A \cap Z$ es un subconjunto no vacío del conjunto bien ordenado A y tiene, por tanto, un primer elemento a_0. Además, a_0 es un primer elemento de Z (Problema 12); así que Y es bien ordenado.

Hay que demostrar también que Y es normal. Si $a \in Y$, entonces a pertenece a un conjunto normal A. Por otra parte, $s_A(a) = s_Y(a)$ (Problema 12), y así

$$f(X - s_Y(a)) = f(X - s_A(a)) = a$$

esto es, Y es normal. Por último, es $Y = X$, pues suponiendo que no fuese así, es decir, que $X - Y \neq \varnothing$ y que, por ejemplo, $a = f(X - Y)$, hágase $Y^* = Y \cup \{a\}$ y sea Y^* ordenado por el orden de Y y con a superior a todo elemento de Y. Entonces $f(X - s_Y(a)) = f(X - Y) = a$ y, por tanto, Y^* es normal. De modo que $a \in Y$. Pero esto contradice al ser la f una función de elección, es decir, que $f(X - Y) = a \in X - Y$ que es disjunto de Y. Por tanto, $Y = X$ y entonces X es bien ordenado.

LEMA DE ZORN Y APLICACIONES

3. Demostrar: Si B es un conjunto parcialmente ordenado, hay entonces un subconjunto totalmente ordenado A de B tal que A no es subconjunto propio de ningún otro subconjunto totalmente ordenado de B.

Solución:

Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos totalmente ordenados de B, parcialmente ordenada por inclusión. Supóngase, además, que $\{B_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$. Sea el conjunto $A = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Nótese primero que A es totalmente ordenado. Porque si $a, b \in A$ existen, entonces $j, k \in I$ tales que $a \in B_j$, $b \in B_k$. Como $\mathscr{A}$ es totalmente ordenado, uno de ellos, B_j, por ejemplo, es un subconjunto del otro, luego $a, b \in B_k$. Como B_k es totalmente ordenado, o bien $a \precsim b$ o bien $b \precsim a$. Luego dos elementos cualesquiera de A son comparables; así que $A \in \mathscr{A}$.

Pero, para todo $i \in I$, $B_i \subset A$, A es entonces un mayorante de $\{B_i\}_{i \in I}$. Como todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$ tiene un mayorante, por el lema de Zorn $\mathscr{A}$ tiene un elemento maximal que es un subsubconjunto de B totalmente ordenado que no es subconjunto propio de ningún otro subconjunto totalmente ordenado de B.

4. Demostrar: Sea $\mathscr{R}$ una relación de A en B siendo A el dominio de definición de $\mathscr{R}$. Nótese que $\mathscr{R}$ es un subconjunto de $A \times B$. Existe entonces un subconjunto f^* de $\mathscr{R}$ tal que f^* es una función de A en B.

Solución:

Sea $\mathscr{A}$ la familia de subconjuntos de $\mathscr{R}$ en los que cada $f \in \mathscr{A}$ es una función de un subconjunto de A en B.

Ordénese parcialmente $\mathcal{A}$ por inclusión. Nótese que si $f_1 : A_1 \to B$ es un subconjunto de $f_2 : A_2 \to B$ entonces $A_1 \subset A_2$.

Supóngase ahora que $\{f_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ totalmente ordenado. Entonces (véase Problema 12) $f = \bigcup_{i \in I} f_i$ es una función de $\bigcup_{i \in I} A_i$ en B y, por tanto, f es un mayorante de $\{f_i\}_{i \in I}$. Por el lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal $f^* : A^* \to B$. Si se demuestra que $A^* = A$, el teorema está demostrado.

Supóngase $A^* \neq A$. Existe entonces un elemento $a \in A$ tal que $a \notin A^*$. Además, como el dominio de definición de $\mathcal{R}$ es A, existe un par ordenado $(a, b) \in \mathcal{R}$. Entonces $f^* \cup \{(a, b)\}$ es una función de $A^* \cup \{a\}$ en B. Pero esto contradice el hecho de ser f^*, que sería un subconjunto propio de $f^* \cup \{(a, b)\}$, un elemento maximal de $\mathcal{A}$. Por consiguiente, $A^* = A$ y el teorema está demostrado.

5. (Aplicación al álgebra lineal.) Demostrar que si V es un espacio vectorial, V tiene una base.

Solución:

Si V consiste en el vector nulo solamente, entonces, por definición, el conjunto vacío es una base de V. Se supone, pues, que V contiene un vector a no nulo. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de vectores independientes de V. Es decir, cada elemento $B \in \mathcal{B}$ es un conjunto de vectores independientes. Nótese que $\mathcal{B}$ no es vacío, pues, por ejemplo, $\{a\}$ pertenece a $\mathcal{B}$. Ordénese $\mathcal{B}$ por inclusión.

Suponiendo ahora que $\{B_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ totalmente ordenado, si se demuestra que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ pertenece a $\mathcal{B}$, es decir, que es un conjunto de vectores independientes, sería entonces A un mayorante de $\{B_i\}_{i \in I}$. Si A es un conjunto de vectores dependientes, entonces existen vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in A$ tales que

$$c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

donde por lo menos un $c_i \neq 0$. Nótese que existen también elementos $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $\mathbf{a}_1 \in B_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_n \in B_{i_n}$. Como $\{B_i\}_{i \in I}$ es totalmente ordenada, uno de los conjuntos, sea B_{i_1}, es un superconjunto de los otros, luego $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in B_{i_1}$. En vista de (1), B_{i_1} sería un conjunto de vectores dependientes, cosa que contradice lo supuesto. Así, pues, A es un conjunto de vectores independientes, pertenece a $\mathcal{B}$ y es un mayorante de $\{B_i\}_{i \in I}$.

Por el lema de Zorn, $\mathcal{B}$ tiene un mayorante B^*. Entonces se puede demostrar que B^* es una base de V.

Obsérvese que la parte principal de la demostración consiste en demostrar que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ pertenece a $\mathcal{B}$. Es un ejemplo típico del empleo del lema de Zorn.

6. Demostrar el teorema de la buena ordenación por el lema de Zorn.

Solución:

Sea A un conjunto cualquiera. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos bien ordenados de A, así, pues, un elemento $W \in \mathcal{A}$ es un par $W = (B, \precsim)$ donde B es un subconjunto de A y $\precsim$ define una buena ordenación en B. Ordénese $\mathcal{A}$ parcialmente como sigue:

$$W_1 \precsim W_2 \quad \text{si} \quad W_1 = W_2 \quad \text{o} \quad W_1 \text{ es una sección inicial de } W_2$$

(Obsérvese que $W_1 = (B_1, \precsim) \precsim W_2 = (B_2, \precsim)$ implica $B_1 \subset B_2$.)

Suponiendo que $\{W_i = (B_i, \precsim)\}_{i \in I}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{A}$, entonces la familia de conjuntos $\{B_i\}_{i \in I}$ ordenada por inclusión, es también totalmente ordenada. Defínase ahora el conjunto ordenado $W = (B, \precsim)$ como sigue. Primero sea

$$B = \cup_{i \in I} B_i$$

Supóngase $a, b \in B$. Existen entonces $j, k \in I$ tales que $a \in B_j$, $b \in B_k$. Como $\{B_i\}_{i \in I}$ es totalmente ordenado, uno de ellos, B_j, por ejemplo, es un subconjunto del otro, así que $a, b \in B_k$.

Escríbase $a \precsim b$ como elementos de B si $a \precsim b$ como elementos de B_k. Entonces $W = (B, \precsim)$ es un subconjunto bien ordenado y, por tanto, pertenece a $\mathcal{A}$. Además, W es un mayorante de $\{W_i\}_{i \in I}$. Por consiguiente, por el lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene por lo menos un elemento maximal

$$W^* = (B^*, \precsim)$$

Supóngase $B^* \neq A$. Sea $a \in A - B^*$. Entonces W^* es una sección inicial del conjunto bien ordenado $\{W^*, \{a\}\}$, que también pertenece a $\mathcal{A}$. Lo cual contradice la suposición de que W^* es un elemento maximal de $\mathcal{A}$. Así, pues, la afirmación $B^* \neq A$ es falsa; luego $B^* = A$. Por tanto, A puede ser bien ordenado.

Problemas propuestos

7. Decir cuál de las afirmaciones siguientes sobre números cardinales es falsa y cuál es cierta; razonar la respuesta

$$(1)\quad \aleph_0 + \aleph_\lambda = \aleph_\lambda \qquad\qquad (2)\quad \aleph_\lambda + \aleph_\mu = \aleph_{\lambda+\mu}$$

8. Demostrar el Teorema 12-1: Si $\alpha = \bar{\lambda}$ y $\beta = \bar{\mu}$ son números cardinales, se tiene

$$(1)\quad \alpha < \beta \quad \text{implica} \quad \lambda < \mu$$

$$(2)\quad \lambda < \mu \quad \text{implica} \quad \alpha \leq \beta$$

9. Demostrar el Teorema 9-11: Para numeros cardinales α y β es válida una de las relaciones siguientes $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$

10. Demostrar el Teorema 12-2 Todo conjunto de numeros cardinales está bien ordenado por la relacion $\alpha \leq \beta$

11. Considérese la demostración de esta proposición: Existe un conjunto finito de numeros naturales que no es un subconjunto propio de otro conjunto de números naturales

Demostración Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los conjuntos finitos de números naturales, ordenada parcialmente por inclusión Sea ahora $\{B_i\}_{i \in I}$ un subconjunto de $\mathscr{A}$ totalmente ordenado, y sea el conjunto $A = \cup_{i \in I} B_i$ Nótese que, para todo $i \in I$, $B_i \subset A$; luego A es un mayorante de $\{B_i\}_{i \in I}$.

Como todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{A}$ tiene un mayorante, por el lema de Zorn $\mathscr{A}$ tiene un elemento maximal, que es un conjunto finito que no es un subconjunto propio de ningún otro conjunto finito

Se pregunta Como esta proposición es evidentemente falsa, ¿cuál es el paso incorrecto de la demostración?

12. Demostrar los dos enunciados siguientes, supuestos en la demostración en el Problema 2

(i) El primer elemento a_0 del conjunto $A \cap Z$ es un primer elemento del conjunto Z

(ii) $s_A(a) = s_Y(a)$

13. Demostrar la siguiente proposición, supuesta en la demostración en el Problema 4 Sea $\{f_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ un conjunto de funciones totalmente ordenado por inclusión Entonces $\cup_{i \in I} f_i$ es una función de $\cup_{i \in I} A_i$ en B

Respuestas a los problemas propuestos

7. (1) Cierta Porque $\aleph_0$ es el número cardinal de un conjunto enumerable y, como ya se demostro antes, la unión de un conjunto enumerable con un conjunto infinito no cambia el cardinal de este conjunto infinito

(2) Falsa. Pues como la adición de cardinales es conmutativa,

$$\aleph_{\lambda+\mu} = \aleph_\lambda + \aleph_\mu = \aleph_\mu + \aleph_\lambda = \aleph_{\mu+\lambda}$$

implicaría que la adición de ordinales es conmutativa, que no es cierto.

Capítulo 13

Paradojas de la teoría de conjuntos

INTRODUCCION

La teoría de conjuntos, como una disciplina matemática, fue Cantor (1845-1918) el primero que la estudio hacia finales del siglo diecinueve. Hoy la teoria de conjuntos es fundamental en las matemáticas cuyas ramas ha transformado casi todas. Por la misma época en que la teoría de conjuntos comenzó a influir sobre otras ramas de las matemáticas, se le descubrieron varias contradicciones o paradojas, la primera por Burali-Forti, en 1897, de las cuales se presentan algunas en este capitulo. Si bien es factible eliminar estos contrasentidos por un desarrollo axiomático estricto de la teoria de conjuntos, aún quedan muchos interrogantes por responder.

CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS (PARADOJA DE CANTOR)

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los conjuntos. Entonces todo subconjunto de $\mathcal{C}$ es asimismo un elemento de $\mathcal{C}$; luego el conjunto potencia de $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}$, esto es,

$$2^{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$$

Pero $2^{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ implica que

$$\#(2^{\mathcal{C}}) \leq \#(\mathcal{C})$$

Pero entonces, según el teorema de Cantor,

$$\#(\mathcal{C}) < \#(2^{\mathcal{C}})$$

Así, pues, el concepto de conjunto de todos los conjuntos lleva a una contradicción.

PARADOJA DE RUSSELL

Sea Z el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir,

$$Z = \{X \mid X \notin X\}$$

Se pregunta, ¿Z es o no es elemento de sí mismo? Si Z no pertenece a Z, entonces, por la definición de Z, Z se pertenece a sí mismo. Pero si Z pertenece a Z, entonces, por la definición de Z, Z no pertenece a sí mismo. En cualquiera de los dos casos hay contradicción.

Esta paradoja es de cierto modo análoga a la paradoja popular siguiente: En una aldea hay un barbero que afeita solamente a los hombres que no se afeitan ellos mismos. Se pregunta ¿Al barbero quién lo afeita?

CONJUNTO DE TODOS LOS NUMEROS ORDINALES (PARADOJA DE BURALI-FORTI)

Sea Δ el conjunto de todos los números ordinales. Por un teorema anterior, Δ es un conjunto bien ordenado, sea $\alpha = \text{ord}\ (\Delta)$. Considérese ahora $s(\alpha)$, el conjunto de todos los números ordinales menores que α. Obsérvese que

(1) Puesto que $s(\alpha)$ consiste en todos los elementos de Δ que son anteriores a α, $s(\alpha)$ es una sección inicial de Δ.

(2) Por un teorema previo, $\alpha = \text{ord}\ (s(\alpha))$; por tanto,

$$\text{ord}\ (s(\alpha)) = \alpha = \text{ord}\ (\Delta)$$

Por consiguiente. Δ es isomorfo a una de sus secciones iniciales. Así, pues, el concepto de conjunto de todos los números ordinales lleva a una contradicción con el Teorema 11-8.

CONJUNTO DE TODOS LOS NUMEROS CARDINALES

Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los números cardinales Entonces, para cada cardinal $\alpha \varepsilon \mathscr{A}$ hay un conjunto A_α tal que $\alpha = \#(A_\alpha)$. Sea

$$A = \cup_{\alpha \varepsilon \mathscr{A}} A_\alpha$$

Considérese el conjunto potencia 2^A de A. Nótese que $2^A \sim A_{\#(2^A)}$, que es un subconjunto de A. Por consiguiente, $2^A \precsim A$ y, en particular,

$$\#(2^A) \leq \#(A)$$

Pero, por el teorema de Cantor,

$$\#(A) < \#(2^A)$$

Así, pues, el concepto de conjunto de todos los números cardinales es contradictorio.

FAMILIA DE TODOS LOS CONJUNTOS EQUIPOTENTES A UN CONJUNTO

Sea $A = \{a, b, \ldots\}$ un conjunto (no necesariamente enumerable) y sea $\mathscr{A} = \{i, j, \ldots\}$ otro conjunto cualquiera. Considérense los conjuntos

$$\begin{aligned} A_i &= \{(a,i), (b,i), \ldots\} \\ A_j &= \{(a,j), (b,j), \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

es decir, la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \varepsilon \mathscr{A}}$. Nótese que

$$\#(\{A_i\}_{i \varepsilon \mathscr{A}}) = \#(\mathscr{A})$$

y $A_i \sim A$ para todo $i \varepsilon \mathscr{A}$.

Sea ahora α la familia de todos los conjuntos equipotentes al A. Considerando el conjunto potencia 2^α de α y definiendo la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\alpha}$ como se dijo, puesto que cada $A_i \sim A$,

$$\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\alpha} \subset \alpha$$

Por tanto,

$$\#(2^\alpha) = \#(\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\alpha}) \leq \#(\alpha)$$

Pero por el teorema de Cantor, $\#(\alpha) < \#(2^\alpha)$. Así, pues, el concepto de familia de todos los conjuntos equivalentes a un conjunto (la definición que se dio de número cardinal) es contradictorio.

FAMILIA DE TODOS LOS CONJUNTOS ISOMORFOS A UN CONJUNTO BIEN ORDENADO

Sea A un conjunto bien ordenado. Entonces, el conjunto A_i, definido como antes y ordenado por

$$(a, i) \precsim (b, i) \quad \text{si} \quad a \precsim b$$

es bien ordenado y es isomorfo al A, esto es, $A_i \simeq A$.

Sea ahora λ la familia de todos los conjuntos isomorfos al conjunto bien ordenado A. Considérese el conjunto potencia 2^λ de λ, y defínase la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\lambda}$ como se hizo antes. Como cada conjunto A_i es isomorfo al A

$$\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\lambda} \subset \lambda$$

Por consiguiente,

$$\#(2^\lambda) = \#(\{A_i\}_{i \varepsilon 2^\lambda}) \leq \#(\lambda)$$

Como, por el teorema de Cantor, $\#(\lambda) < \#(2^\lambda)$, el concepto de familia de todos los conjuntos isomorfos a un conjunto bien ordenado (la definición dada de número ordinal) es contradictorio.

Capítulo 14

Algebra de proposiciones

ENUNCIADOS

Los *enunciados* (o *aserciones verbales*) se denotarán por las letras

$$p, q, r$$

(con o sin subíndices). El carácter fundamental de un enunciado es que o bien es *verdadero*, o bien es *falso*, pero no ambas cosas. La verdad o falsedad de un enunciado se llama su *valor de verdad*. Algunos enunciados son *compuestos*, es decir, están formados de *enunciados simples* y de varias conectivas que se estudiarán después.

Ejemplo 1-1: «Las rosas son rojas y las violetas son azules» es un enunciado compuesto de los enunciados simples «Las rosas son rojas» y «Las violetas son azules».

Ejemplo 1-2: «¿Dónde vas?» no es un enunciado, pues no es ni verdadero ni falso.

Ejemplo 1-3: «Juan está enfermo o viejo» está implícitamente formado de los enunciados simples «Juan está enfermo» y «Juan está viejo».

Propiedad fundamental de los enunciados compuestos es que su valor de verdad está determinado por completo por el valor de verdad de cada uno de los enunciados simples y por el modo como se les reúne para formar el enunciado compuesto.

CONJUNCION, $p \wedge q$

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar por medio de la palabra «y» para formar un enunciado compuesto, que se llama *conjunción* de los primeros enunciados. Simbólicamente se denota la conjunción de dos enunciados p y q por

$$p \wedge q$$

Ejemplo 2-1: Sea p «Está lloviendo» y sea q «El sol brilla». Entonces $p \wedge q$ denota el enunciado «Está lloviendo y el sol brilla».

Ejemplo 2-2: El símbolo $\wedge$ se puede emplear para definir la intersección de dos conjuntos, así

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El valor de verdad del enunciado compuesto $q \wedge p$ satisface la condición siguiente:

V_1 Si p es verdadero y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es verdadero; en otro caso $p \wedge q$ es falso. Es decir, la conjunción de dos enunciados es verdadera solamente si cada componente es verdadero.

Ejemplo 2-3: Sean los cuatro enunciados siguientes:

(1) París está en Francia y $2 + 2 = 5$
(2) París está en Inglaterra y $2 + 2 = 4$
(3) París está en Inglaterra y $2 + 2 = 5$
(4) París está en Francia y $2 + 2 = 4$

Según V_1, solamente (4) es verdadero. Todos los demás enunciados son falsos porque al menos uno de los componentes es falso.

Una manera muy conveniente de expresar V_1 es por medio de una tabla como sigue:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Obsérvese que la primera línea es una manera abreviada de decir que si p es verdadero y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es verdadero. Las otras líneas tienen significados parecidos.

DISYUNCION, $p \vee q$

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar por medio de la palabra «o» (en el sentido de «y o») para formar un nuevo enunciado que se llama *disyunción* de los dos enunciados previos Simbólicamente se denota la disyunción de dos enunciados p y q por

$$p \vee q$$

Ejemplo 3-1: Sea p «El estudió francés en la universidad», y sea q «El vivio en Francia» Entonces $p \vee q$ es el enunciado «El estudió francés en la universidad o él vivió en Francia».

Ejemplo 3-2: El símbolo $\vee$ se puede emplear para definir la unión de dos conjuntos, así

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El valor de verdad del enunciado compuesto $p \vee q$ cumple la condición siguiente:

V_2: Si p es verdadero o q es verdadero o si ambos p y q son verdaderos, entonces $p \vee q$ es verdadero; en otro caso $p \vee q$ es falso. Es decir, la disyunción de dos enunciados es falsa solamente si cada enunciado componente es falso.

V_2 se puede expresar también en una tabla como sigue:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 3-3: Sean los enunciados siguientes:

(1) París está en Francia o 2 + 2 = 5.
(2) París está en Inglaterra o 2 + 2 = 4
(3) París está en Francia o 2 + 2 = 4.
(4) París está en Inglaterra o 2 + 2 = 5

Solo (4) es falso. Cada uno de los otros enunciados es verdadero, pues al menos uno de los componentes es verdadero

NEGACION, $\sim p$

Dado un enunciado p, se puede formar otro enunciado, que se llama *negación* de p, escribiendo «Es falso que . . » antes de p o, cuando es posible, insertando en p la palabra «no» Simbólicamente se denota la negación por

$$\sim p$$

Ejemplo 4-1: Considerense los tres enunciados que siguen.

(1) París está en Francia.
(2) Es falso que París está en Francia
(3) París no está en Francia.

Entonces (2) y (3) son cada uno negación de (1).

Ejemplo 4-2: Sean los siguientes enunciados:

(1) 2 + 2 = 5
(2) Es falso que 2 + 2 = 5
(3) $2 + 2 \neq 5$

(2) y (3) son cada uno la negación de (1).

El valor de verdad de la negación de un enunciado depende de la siguiente condición:

V_3: Si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso, si p es falso, entonces $\sim p$ es verdadero. Es decir, el valor de verdad de la negación de un enunciado es siempre el opuesto del valor de verdad del enunciado.

Ejemplo 4-3: Examínense los enunciados del Ejemplo 4-1: Nótese que (1) es verdad y (2) y (3), sus negaciones, son falsos

Ejemplo 4-4: Considerense los enunciados del Ejemplo 4-2: Obsérvese que (1) es falso y (2) y (3) son verdaderos

V_3 se puede escribir en forma de tabla como sigue:

p	$\sim p$
V	F
F	V

CONDICIONAL, $p \to q$

Multitud de enunciados, especialmente en las matemáticas, son de la forma «Si p entonces q». Tales enunciados se llaman *condicionales* y se les denota por

$$p \to q$$

El condicional $p \to q$ se puede también leer:

(*a*) p implica q (*c*) p es suficiente para q
(*b*) p solamente si q (*d*) q es necesario para p

El valor de verdad del enunciado condicional $p \to q$ resulta de la condición

V_4: El condicional $p \to q$ es verdadero a menos que p sea verdadero y q falso. Es decir, V_4 afirma que un enunciado verdadero no puede implicar uno falso.

V_4 se puede escribir como tabla así:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 5-1: Sean los siguientes enunciados

(1) Si Paris está en Francia, entonces $2 + 2 = 5$
(2) Si Paris esta en Inglaterra, entonces $2 + 2 = 4$
(3) Si Paris está en Francia, entonces $2 + 2 = 4$
(4) Si Paris está en Inglaterra, entonces $2 + 2 = 5$

Por V_4, solamente (1) es un enunciado falso; los otros, son verdaderos

BICONDICIONAL, $p \leftrightarrow q$

Otro enunciado corriente es el de la forma «p si, y solamente si, q» o con una cómoda abreviatura, «p ssi q». Tales enunciados se llaman *bicondicionales* y se les denota por

$$p \leftrightarrow q$$

El valor de verdad de los enunciados bicondicionales $p \leftrightarrow q$ obedece a la condición:

V_5: Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ es verdadero; si p y q tienen valores de verdad opuestos, entonces $p \leftrightarrow q$ es falso.

Ejemplo 6-1: Sean los enunciados siguientes

(1) Paris está en Francia si, y solamente si, $2 + 2 = 5$
(2) Paris esta en Inglaterra si, y solamente si, $2 + 2 = 4$
(3) Paris esta en Francia si, y solamente si, $2 + 2 = 4$
(4) Paris está en Inglaterra si, y solamente si, $2 + 2 = 5$

Según V_5, (3) y (4) son verdaderos y (1) y (2) son falsos

V_5 se escribe en forma de tabla como sigue:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

POLINOMIOS Y POLINOMIOS BOOLIANOS

Las sumas finitas (+), productos (·) y diferencias (−) de las *indeterminadas* (o *variables*)

$$x, y, \ldots$$

sometidas a las reglas usuales del álgebra ordinaria, constituyen los polinomios en dichas variables.

Ejemplo 7-1: Los siguientes son polinomios en dos indeterminadas:

$$f(x,y) = x \cdot x - x \cdot y + y \cdot y \cdot y + x \cdot x = 2x^2 - xy + y^3$$
$$g(x,y) = (x-y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2$$

Si en el polinomio $f(x, y, \ldots)$ se remplaza cada indeterminada por un número real dado $x_0, y_0, \ldots$, respectivamente, la expresión

$$f(x_0, y_0, \ldots)$$

que denota sumas, productos y diferencias de números reales, es ella misma un número real. Es decir, que si $x, y, \ldots$ se consideran como *variables reales*, entonces el polinomio $f(x, y, \ldots)$ define una función que hace corresponder un cierto valor $f(x_0, y_0, \ldots)$ como imagen de los números reales $x_0, y_0, \ldots$

Ejemplo 7-2: Sean los polinomios del Ejemplo 7-1. Entonces,

$$f(2,3) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 4 - 6 + 27 + 4 = 29$$
$$g(3,1) = (3-1)\cdot(3+1) = 2 \cdot 4 = 8$$

Las operaciones suma, producto y diferencia, definidas entre números reales, inducen operaciones semejantes llamadas asimismo suma, producto y diferencia entre polinomios.

Ejemplo 7-3: Sean los polinomios del Ejemplo 7-1. Se tiene

$$f(x,y) - g(x,y) = (2x^2 - xy + y^3) - (x^2 - y^2)$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y) = (2x^2 - xy + y^3) \cdot (x^2 - y^2)$$

Supóngase ahora que las letras

$$p, q, \ldots$$

que antes denotaban enunciados, sean indeterminadas, es decir, variables. Combinando estas variables por las conectivas $\wedge$, $\vee$ y $\sim$, o, con más generalidad, por las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, se construyen expresiones que se llaman *polinomios boolianos*.

Ejemplo 7-4: Los siguientes son polinomios boolianos en dos variables

$$f(p,q) = \sim p \vee (p \rightarrow q)$$
$$g(p,q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$$

Y además pueden emplearse los símbolos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ como conectivas para los polinomios boolianos, así que se puede hablar de la conjunción, disyunción y negación de polinomios boolianos.

Ejemplo 7-5: Sean los polinomios boolianos del Ejemplo 7-4. Entonces

$$f(p,q) \wedge g(p,q) = [\sim p \vee (p \rightarrow q)] \wedge [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge q]$$
$$f(p,q) \rightarrow g(p,q) = [\sim p \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge q]$$

Suponiendo ahora que cada una de las variables $p, q, \ldots$ de un polinomio booliano $f(p, q, \ldots)$ se remplazan respectivamente por un enunciado particular denotado por $p_0, q_0, \ldots$, la expresión

$$f(p_0, q_0, \ldots)$$

es también un enunciado y tiene por lo mismo un valor de verdad.

Ejemplo 7-6: Sean $f(p, q) = \sim p \wedge (p \rightarrow q)$ y p_0 «2 + 2 = 5» y q_0 «1 + 1 = 2». Entonces $f(p_0, q_0)$ quiere decir

«2 + 2 ≠ 5, y si 2 + 2 = 5 entonces, 1 + 1 = 2»

Por $\mathbf{V}_4$, $r_0 = p_0 \rightarrow q_0$ es verdadero. Nótese que $s_0 = \sim p_0$ es verdadero. Por tanto, por $\mathbf{V}_1$, $f(p_0, q_0) = s_0 \wedge r_0$ es también verdadero.

Observación 14-1: Sea un polinomio booliano $f(p, q, \ldots)$ y sean los enunciados $p_0, q_0, \ldots$ con el mismo valor de verdad que los enunciados $p_0, q_0, \ldots$. Entonces $f(p_0, q_0, \ldots)$ tiene el mismo valor de verdad que $f(p_0, q_0, \ldots)$.

PROPOSICIONES Y TABLAS DE VERDAD

Definición 14-1: Se llama proposición un polinomio booliano en las variables $p, q, \ldots$ y se le denota por

$$P(p, q, \ldots), Q(p, q, \ldots), \ldots$$

o simplemente por $P, Q, \ldots$

Por la Observación 14-1, el valor de verdad de una proposición $P(p, q, \ldots)$ evaluado sobre enunciados cualesquiera, es función solamente de los valores de verdad de los enunciados y no de los enunciados particulares mismos. Así, pues, se habla del «valor de verdad» de cada una de las variables, $p, q, \ldots$, y del «valor de verdad» de la proposición $P(p, q, \ldots)$.

Una simple manera concisa de mostrar la relación entre el valor de verdad de una proposición $P(p, q, \ldots)$ y los valores de verdad de sus variables $p, q, \ldots$ es por una *tabla de verdad*. Por ejemplo, la tabla de verdad de la proposición $\sim(p \wedge \sim q)$ se construye como sigue:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Las primeras columnas de la tabla están ocupadas por las variables $p, q, \ldots$. En la tabla hay suficientes filas para abarcar todas las combinaciones de V y F para estas variables. (Para 2 variables, como en este caso, se necesitan 4 filas; para 3 variables se necesitan 8 filas y, en general, para n variables se requieren 2^n filas). Luego hay otra columna para cada paso sucesivo del cálculo del valor de verdad que se busca para la proposición, valor que aparece en la última columna.

La tabla de verdad de la proposición anterior $\sim(p \wedge \sim q)$ consiste solamente en las columnas encabezadas por las variables y la columna encabezada por la proposición, así:

p	q	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otra manera de construir esta tabla de verdad de $\sim(p \wedge \sim q)$ es la siguiente: Primero trácese la tabla.

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					
Paso						

Escribiendo la proposición en la fila superior a la derecha de las variables de la proposición. Cada variable o conectiva encabeza una columna. Los valores de verdad se anotan luego en la tabla en varios pasos, así:

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
V	V		V			V
V	F		V			F
F	V		F			V
F	F		F			F
Paso			1			1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
V	V		V		F	V
V	F		V		V	F
F	V		F		F	V
F	F		F		V	F
Paso			1		2	1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
V	V		V	F	F	V
V	F		V	V	V	F
F	V		F	F	F	V
F	F		F	F	V	F
Paso			1	3	2	1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
Paso		4	1	3	2	1

La tabla de verdad de la proposición queda formada por las columnas encabezadas por las variables y por la última columna completada en el último paso

TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCION

Algunas proposiciones $P(p, q, \ldots)$ tienen solo V en la última columna de sus tablas de verdad. Es decir, que la proposición $P(p, q, \ldots)$ será siempre un enunciado verdadero sean cuales fueren los enunciados $p_0, q_0, \ldots$ verdaderos o falsos por los que se sustituyan las variables. Estas proposiciones se llaman *tautologías*.

Definición 14-2: Una proposición $P(p, q, \ldots)$ es una *tautología* si $P(p_0, q_0, \ldots)$ es verdadera para cualesquiera enunciados $p_0, q_0, \ldots$

De manera análoga.

Definición 14-3: Una proposición $P(p, q, \ldots)$ es una *contradicción* si $P(p_0, q_0, \ldots)$ es falsa para cualesquiera enunciados $p_0, q_0, \ldots$ O sea que una contradicción solo contiene F en la última columna de su tabla de verdad.

Ejemplo 8-1: La proposición «p o no p», es decir $p \vee \sim p$ es una tautología, cosa que se verifica al construir una tabla de verdad.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Ejemplo 8-2: La proposición «p y no p», es decir $p \wedge \sim p$ es una contradicción, lo cual se ve por la tabla

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo 8-3: Un principio fundamental del razonamiento lógico, la «ley del silogismo», dice que «Si p implica q y q implica r, entonces p implica r». Esto es, la proposición

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

es una tautología. Lo que se ve por la tabla de verdad:

p	q	r	$[(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$r)]$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Paso			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

En esta tabla se necesitan ocho filas para abarcar todas las combinaciones de V y F para las tres variables p, q y r.

Como una tautología es siempre verdadera, la negación de una tautología será siempre falsa, o sea que se trata de una contradicción; y viceversa. En otras palabras,

Observación 14-2: Si $P(p, q, \ldots)$ es una tautología, entonces $\sim P(p, q, \ldots)$ es una contradicción, y viceversa.

Sean ahora $P_1(p, q, \ldots)$, $P_2(p, q, \ldots)$, ... proposiciones cualesquiera y sea $P(p, q, \ldots)$ una tautología. Entonces $P(p, q, \ldots)$ no depende de los valores particulares de verdad de $p, q, \ldots$. Por tanto, si se sustituye p por P_1, q por P_2 en la $P(p, q, \ldots)$ se tiene aún una tautología. Dicho de otra manera:

Teorema (principio de sustitución): Si $P(p, q, \ldots)$ es una tautología, entonces

$$P(P_1, P_2, \ldots)$$

es también una tautología para cualesquiera proposiciones P_1, P_2.

EQUIVALENCIA LOGICA

Dos proposiciones $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ se dicen lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. Se denota la equivalencia lógica de $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ por

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

Ejemplo 9-1: Las tablas de verdad de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ y $p \leftrightarrow q$ son como sigue.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \to q \wedge q \to p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Luego $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$.

Ejemplo 9-2: Las tablas de verdad siguientes muestran que $p \to q$ y $\sim p \vee q$ son lógicamente equivalentes, esto es, que $p \to q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Los teoremas que siguen son consecuencias de estas definiciones dadas en lo que precede

Teorema 14-1: La relación entre proposiciones definida por

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

es una relación de equivalencia. Es decir:

(1) para todo $P(p, q, \ldots)$, $P(p, q, \ldots) \equiv P(p, q, \ldots)$;

(2) si $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$, entonces $Q(p, q, \ldots) \equiv P(p, q, \ldots)$;

(3) si $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots) \equiv R(p, q, \ldots)$ entonces $P(p, q, \ldots) \equiv R(p, q, \ldots)$.

Teorema 14-2: $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$ si, y solamente si, la proposición

$$P(p, q, \ldots) \leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$$

es una tautología.

Teorema 14-3: Si $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ son ambas tautologías o bien ambas contradicciones, entonces

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

El siguiente corolario es una consecuencia del principio de sustitución en las tautologías y del Teorema 14-2 anterior.

Corolario 14-1: Si $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$, entonces

$$P(P_1, P_2, \ldots) \equiv Q(P_1, P_2, \ldots)$$

para cualesquiera proposiciones $P_1, P_2, \ldots$

Es decir, que, si se sustituyen por proposiciones las variables en proposiciones equivalentes, las proposiciones que resultan son también equivalentes.

ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

Teorema 14-4:

(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
(2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(5a) $p \vee f \equiv p$	(5b) $p \wedge t \equiv p$
(6a) $p \vee t \equiv t$	(6b) $p \wedge f \equiv f$
(7a) $p \vee \sim p \equiv t$	(7b) $p \wedge \sim p \equiv f$
(8a) $\sim\sim p \equiv p$	(8b) $\sim t \equiv f,\ \sim f \equiv t$
(9a) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	(9b) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Este teorema se puede demostrar construyendo las tablas de verdad correspondientes. Aquí t y f denotan variables que están restringidas respectivamente a enunciados verdaderos y falsos.

En vista del Corolario 14-1, cualquier proposición puede sustituir a las variables en el Teorema 14-4 (excepto a t y f, que solo se pueden remplazar respectivamente por una tautología V o por una contradicción F). Así, pues, las proposiciones cumplen las leyes de la Tabla 14-1 que sigue. Nótese la semejanza entre las leyes del álgebra de proposiciones de la Tabla 14-1 y las leyes del algebra de conjuntos de la página 104.

LEYES DEL ALGEBRA DE PROPOSICIONES	
Leyes de idempotencia	
1a. $P \vee P \equiv P$	1b. $P \wedge P \equiv P$
Leyes asociativas	
2a. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	2b. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Leyes conmutativas	
3a. $P \vee Q \equiv Q \vee P$	3b. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Leyes distributivas	
4a. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	4b. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Leyes de identidad	
5a. $P \vee F \equiv P$	5b. $P \wedge T \equiv P$
6a. $P \vee T \equiv T$	6b. $P \wedge F \equiv F$
Leyes del complemento	
7a. $P \vee \sim P \equiv T$	7b. $P \wedge \sim P \equiv F$
8a. $\sim\sim P \equiv P$	8b. $\sim T \equiv F,\ \sim F \equiv T$
Leyes de De Morgan	
9a. $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$	9b. $\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

Tabla 14-1

IMPLICACION LOGICA

Examínese el siguiente teorema:

Teorema 14-5: Si $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ son proposiciones, las tres condiciones que siguen son equivalentes:

(1) $\sim P(p, q, \ldots) \vee Q(p, q, \ldots)$ es una tautología.
(2) $P(p, q, \ldots) \wedge \sim Q(p, q, \ldots)$ es una contradicción.
(3) $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ es una tautología.

En vista del teorema anterior se puede introducir la

Definición 14-4: Se dice que una proposición $P(p, q, \ldots)$ *implica lógicamente* una proposición $Q(p, q, \ldots)$, lo que se escribe

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$$

si se verifica una de las condiciones del Teorema 14-5.

Ejemplo 10-1: La proposición «p implica q y q implica r» implica lógicamente la proposición «p implica r», pues, como se muestra en el Ejemplo 8-3.

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

es una tautologia. O lo que es lo mismo.

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$$

Ejemplo 10-2: Considerese la tabla de verdad de

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
Paso		1	2	1	4	3	1	2	1

Obsérvese que $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ es una contradicción; luego $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

Teorema 14-6: La relación entre proposiciones definida por

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$$

es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir:

(1) $P(p, q, \ldots) \Rightarrow P(p, q, \ldots)$.

(2) Si $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots) \Rightarrow P(p, q, \ldots)$, Entonces $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$.

(3) Si $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots) \Rightarrow R(p, q, \ldots)$, Entonces $P(p, q, \ldots) \Rightarrow R(p, q, \ldots)$.

Vale tambien la condición siguiente:

Teorema 14-7: Si $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$ entonces, para cualesquiera proposiciones P_1, P_2,

$$P(P_1, P_2, \ldots) \Rightarrow Q(P_1, P_2, \ldots)$$

Es decir, si una proposición implica lógicamente otra, la relación sigue siendo valida cuando se sustituyen las variables por proposiciones arbitrarias en las proposiciones originales

Observación 14-3: Considerando los símbolos

$$\to \text{ y } \Rightarrow$$

obsérvese que

$$P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$$

es precisamente una proposición y que su tabla de verdad solo puede contener o bien V o bien F en la última columna. Pero

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$$

define una relación entre proposiciones compuestas, a saber, que la proposicion compuesta

$$P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$$

solo tiene V en la última columna de su tabla de verdad, o sea que es una tautologia

Observación 14-4: Considerando ahora los símbolos

$$\leftrightarrow \text{ y } \equiv$$

obsérvese que

$$P(p, q, \ldots) \leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$$

es también precisamente una proposición compuesta y que su tabla de verdad puede tener en la última columna tanto V como F. Pero

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

define una relación entre proposiciones compuestas estableciendo que $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ tienen tablas de verdad idénticas, o lo que es lo mismo, que

$$P(p, q, \ldots) \leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$$

solo tiene V en la última columna de su tabla de verdad. Siendo así que, hablando en pura lógica, no cabe distinguir entre dos proposiciones equivalentes, hay autores que usan el signo $=$ en vez del $\equiv$.

ENUNCIADOS LOGICAMENTE VERDADEROS Y LOGICAMENTE EQUIVALENTES

Se dice que un enunciado es *lógicamente verdadero* si se le puede derivar de una tautología, es decir, si el enunciado es de la forma $P(p_0, q_0, \ldots)$, donde $P(p, q, \ldots)$ es una tautología.

Ejemplo 11-1: Sean los siguientes enunciados:

(1) Está lloviendo.
(2) Está lloviendo o no está lloviendo.

El primer enunciado puede ser verdadero, su valor de verdad depende de condiciones extrínsecas al enunciado mismo, es decir, del tiempo climático. El segundo enunciado es lógicamente verdadero, ya que se puede derivar de la tautología $p \vee \sim p$. Es de ver que su valor de verdad no depende de condiciones extrínsecas al enunciado mismo.

Asimismo, se dicen lógicamente equivalentes los enunciados de la forma $P(p_0, q_0, \ldots)$ y $Q(p_0, q_0, \ldots)$ si las proposiciones $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 11-2: Como $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, el enunciado «No es verdad que las rosas son rojas y que las violetas son azules» es lógicamente equivalente al enunciado «Las rosas no son rojas o las violetas no son azules».

Observación 14-5: Téngase muy en cuenta que el propósito principal de este capítulo es el de mostrar que los polinomios boolianos, o sean las proposiciones, junto con sus tablas de verdad, tienen ciertas propiedades algebraicas. No se ha tenido la intención de analizar los fundamentos lógicos de los supuestos aquí utilizados.

Problemas resueltos

ENUNCIADOS

1. Sean p «Hace frío» y q «Está lloviendo». Describir con un enunciado verbal las siguientes aserciones:

(1) $\sim p$	(5) $p \rightarrow \sim q$	(9) $\sim\sim q$
(2) $p \wedge q$	(6) $q \vee \sim p$	(10) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$
(3) $p \vee q$	(7) $\sim p \wedge \sim q$	
(4) $q \leftrightarrow p$	(8) $p \leftrightarrow \sim q$	

Solución:

En cada caso, transcribir $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ por «y», «o», «es falso que» o «no», «si . . . entonces» y «si, y solo si», respectivamente, simplificando luego la oración.

(1) No hace frio.
(2) Hace frio y está lloviendo.
(3) Hace frio o está lloviendo.
(4) Está lloviendo si, y solo si, hace frio
(5) Si hace frío, entonces no está lloviendo
(6) Está lloviendo o no hace frio.
(7) No hace frio y no está lloviendo.
(8) Hace frio si, y solo si, no está lloviendo.
(9) No es verdad que no está lloviendo.
(10) Si hace frio y no está lloviendo, entonces hace frio.

2. Sean p «El es alto» y q «El es galán». Escribir los siguientes enunciados en forma simbólica con p y q.

(1) El es alto y galán.
(2) El es alto pero no es galán.
(3) Es falso que él es bajo o galán.
(4) El no es ni alto ni galán.
(5) El es alto, o el es bajo y galán.
(6) No es verdad que él es bajo o que no es galán.

Solución:

(1) $p \wedge q$ (3) $\sim(\sim p \vee q)$ (5) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(2) $p \wedge \sim q$ (4) $\sim p \wedge \sim q$ (6) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

3. Determinar el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados compuestos.

(1) Si $3 + 3 = 7$, entonces $4 + 4 = 8$.
(2) No es verdad que $2 + 2 = 5$ si, y solo si, $4 + 4 = 10$.
(3) París está en Inglaterra o Londres está en Francia.
(4) No es verdad que $1 + 1 = 3$ o que $2 + 1 = 3$.
(5) Es falso que si París está en Inglaterra, entonces Londres está en Francia.

Solución:

(1) Sea p «$3 + 2 = 7$» y sea q «$4 + 4 = 8$». Nótese que p es falso y q es verdadero. Según V_4, $p \rightarrow q$ es verdadero. Es decir, el enunciado propuesto es verdadero
(2) Sea p «$2 + 2 = 5$», sea q «$4 + 4 = 10$» y sea r «p ssi q». Es claro que p y q son falsos, luego por V_5 $p \leftrightarrow q$ es verdadero esto es, r es verdadero Como r es verdadero, el enunciado, que es la negación de r, es falso
(3) Sea p «París esta en Inglaterra» y q «Londres está en Francia». Evidentemente p y q son falsos, por tanto, según V_2, el enunciado dado, $p \vee q$, es falso.
(4) Sea p «$1 + 1 = 3$» y q «$2 + 1 = 3$», y sea r «p o q» Nótese que p es falso y q verdadero; entonces, por V_2, $p \vee q$ que es r, es verdadero. Como el enunciado propuesto es $\sim r$, es falso.
(5) Sea p «París está en Inglaterra» y q «Londres está en Francia» y sea r «Si p entonces q» Siendo p y q falsos, entonces, por V_4, $p \rightarrow q$ es verdadero, esto es, r es verdadero. En consecuencia, el enunciado propuesto, $\sim r$, es falso

TABLAS DE VERDAD DE PROPOSICIONES

4. Hallar la tabla de verdad de cada proposición.

(1) $\sim p \wedge q$ (3) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
(2) $\sim(p \rightarrow \sim q)$ (4) $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

Solución:

(1)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Método 1

p	q	$\sim$	p	$\wedge$	q
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F
Paso		2	1	3	1

Método 2

(2)

p	q	$\sim q$	$p \to \sim q$	$\sim(p \to \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

Método 1

p	q	$\sim$	$(p$	$\to$	$\sim$	$q)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F
Paso		4	1	3	2	1

Método 2

(3)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Método 1

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\to$	$(p$	$\vee$	$q)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	F	F
Paso		1	2	1	3	1	2	1

Método 2

Se ve que $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es una tautología.

(4)

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Método 1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F
Paso		3	1	2	1	4	3	1	2	1

Método 2

Por lo general, si una proposición es muy complicada, con el segundo método se invierte menos tiempo y espacio.

5. Hallar la tabla de verdad de cada proposición.

(1) $(p \to q) \vee \sim (p \leftrightarrow \sim q)$ (2) $[p \to (\sim q \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \leftrightarrow \sim r)]$

Solución:

(1)

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\vee$	$\sim$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$q)$
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F
Paso		1	2	1	5	4	1	3	2	1

(2)

p	q	r	$[p$	$\to$	$(\sim$	q	$\vee$	$r)]$	$\wedge$	$\sim$	$[q$	$\vee$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$r)]$
V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V	F
Paso			1	4	2	1	3	1	6	5	1	4	1	3	2	1

NEGACION

6. Verificar, por tablas de verdad, que la negación de $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\sim p \vee \sim q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge \sim q$ y $p \leftrightarrow \sim q$ o $\sim p \leftrightarrow q$, respectivamente. Es decir, verificar que

(1) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan)

(2) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan)

(3) $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

(4) $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \leftrightarrow q$

Solución:

(1)

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

(2)

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

(3)

p	q	$p \to q$	$\sim (p \to q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

(4)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \leftrightarrow q$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V	F

7. Verificar: $\sim\sim p \equiv p$.

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

8. Mediante los resultados de los Problemas 6 y 7, simplificar las siguientes proposiciones.

(1) $\sim(p \vee \sim q)$ (3) $\sim(p \wedge \sim q)$ (5) $\sim(\sim p \leftrightarrow q)$

(2) $\sim(\sim p \rightarrow q)$ (4) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ (6) $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$

Solución:

(1) $\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim\sim q \equiv \sim p \wedge q$

(2) $\sim(\sim p \rightarrow q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(3) $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim\sim q \equiv \sim p \vee q$

(4) $\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim\sim p \vee \sim\sim q \equiv p \vee q$

(5) $\sim(\sim p \leftrightarrow q) \equiv \sim\sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow q$

(6) $\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim\sim q \equiv \sim p \wedge q$

9. Simplificar los siguientes enunciados.

(1) No es verdad que las rosas son rojas implica que las violetas son azules.

(2) No es verdad que hace frío y está lloviendo.

(3) No es verdad que él es bajo o galán.

(4) No es verdad que hace frío o que está lloviendo.

(5) No es verdad que si está lloviendo entonces hace frío.

(6) No es verdad que las rosas son rojas ssi las violetas son azules.

Solución:

(1) Sea p «Las rosas son rojas» y sea q «Las violetas son azules». El enunciado dado se puede denotar entonces por $\sim(p \rightarrow q)$. Por el Problema 6, $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$. Así que el enunciado es lógicamente equivalente a «Las rosas son rojas y las violetas no son azules».

(2) Como $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ este enunciado es lógicamente equivalente a «No hace frío o no está lloviendo.

(3) Puesto que $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, este enunciado es lógicamente equivalente a «El no es bajo y no galán».

(4) Nótese que $\sim(\sim p \vee q) \equiv \sim\sim p \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$. Así que el enunciado, que se puede denotar por $\sim(\sim p \vee q)$, donde p es «Hace frío» y q es «Está lloviendo», se puede escribir «Hace frío y no está lloviendo».

(5) Como $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$, el enunciado se puede escribir «Está lloviendo y no hace frío».

(6) Como $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q$, este enunciado es lógicamente equivalente a «Las rosas son rojas ssi las violetas no son azules».

EQUIVALENCIA LOGICA

10. (1) Demostrar la ley asociativa: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

(2) Demostrar la ley distributiva: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Solución: Construyendo una tabla de verdad para cada caso:

(1)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

(2)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

11. Demostrar que la operación de disyunción se puede expresar por las operaciones de conjunción y negación, o sea que $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

Solución:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F

12. Demostrar que la operación condicional es distributiva respecto de la operación de conjunción $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

Solución:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

ALGEBRA DE PROPOSICIONES

13. Con las leyes del álgebra de conjuntos, simplificar:

(1) $(P \vee Q) \wedge \sim P$, (2) $P \vee (P \wedge Q)$, (3) $\sim(P \vee Q) \vee (\sim P \wedge Q)$.

Solución:

(1) $(P \vee Q) \wedge \sim P \equiv \sim P \wedge (P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge P) \vee (\sim P \wedge Q) \equiv F \vee (\sim P \wedge Q) \equiv \sim P \wedge Q$

(2) $P \vee (P \wedge Q) \equiv (P \wedge T) \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge (T \vee Q) \equiv P \wedge T \equiv P$

(3) $\sim(P \vee Q) \vee (\sim P \wedge Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \equiv \sim P \wedge (\sim Q \vee Q) \equiv \sim P \wedge T \equiv \sim P$

IMPLICACION LOGICA

14. Decir entre lo que sigue qué es verdadero o falso: (1) $p \Rightarrow p \wedge q$. (2) $p \Rightarrow p \vee q$

Solución:

Constrúyanse las tablas de verdad de $p \to (p \wedge q)$ y $p \to (p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \to (p \wedge q)$	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Nótese que $p \to (p \wedge q)$ no es una tautología; luego (1) es falsa.
Nótese que $p \to (p \vee q)$ es una tautología; luego (2) es verdadera.

15. Demostrar que $p \wedge q$ implica lógicamente $p \leftrightarrow q$.

Solución:

Constrúyase la tabla de verdad de $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Como $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$ es una tautología, $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

16. Demostrar el Teorema 14-7: Si $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$, entonces

$$P(P_1, P_2, \ldots) \Rightarrow Q(P_1, P_2, \ldots)$$

Solución:

Obsérvese que $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$ si, y solo si,

$$P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$$

es una tautología. Por el principio de sustitución,

$$P(P_1, P_2, \ldots) \to Q(P_1, P_2, \ldots)$$

es también una tautología. Es decir,

$$P(P_1, P_2, \ldots) \Rightarrow Q(P_1, P_2, \ldots)$$

17. Demostrar: Sea $P(p, q, \ldots)$ una proposición; entonces $p \Rightarrow p \vee P(p, q, \ldots)$

Solución:

Por el Problema 14, $p \Rightarrow p \vee q$. Por el Teorema 14-7, $P(p, q, \ldots)$ puede sustituir a q, es decir,

$$p \Rightarrow p \vee P(p, q, \ldots)$$

18. Demostrar. Si $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$, entonces Q es verdadera siempre que P lo sea.

Solución:

Nótese que $P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$ si, y solo si, $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ es una tautología, esto es, siempre es verdadera. Por V_4 $p_0 \rightarrow q_0$ es falso si p_0 es verdadero y q_0 es falso; por tanto, si $P(p, q, \ldots)$ es verdadera, entonces $Q(p, q, \ldots)$ debe ser también verdadera.

PROBLEMAS DIVERSOS

19. La conectiva proposicional $\veebar$ se llama *disyunción exclusiva*; $p \veebar q$ se lee «p o q pero no ambos».

(1) Construir una tabla de verdad para $p \veebar q$.

(2) Demostrar $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Por tanto, $\veebar$ se puede escribir empleando las tres conectivas primarias $\vee$, $\wedge$ y $\sim$.

Solución:

(1) Nótese que $p \veebar q$ es verdadero si p es verdadero o q es verdadero, pero no lo es si ambos p y q son verdaderos; de ahí la tabla de verdad de $p \veebar q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(2) Sea la siguiente tabla de verdad:

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
Paso		1	2	1	4	3	1	2	1

Como las tablas de verdad de $p \veebar q$ y $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ son idénticas, $p \veebar q \equiv (p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

20. La conectiva $\downarrow$ es la *conjunción negativa*; $p \downarrow q$ se lee «Ni p ni q».

(1) Construir una tabla de verdad para $p \downarrow q$.

(2) Demostrar: Las tres conectivas $\vee$, $\wedge$ y $\sim$ se pueden expresar con la conectiva $\downarrow$ como sigue:

$$(a)\ \sim p \equiv p \downarrow p, \quad (b)\ p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q), \quad (c)\ p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$$

Solución:

(1) Nótese que $p \downarrow q$ es verdadero si no es verdadero p ni es verdadero q; así, pues, la tabla de verdad de $p \downarrow q$ es esta

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(2) (a)

p	$\sim p$	$p \downarrow p$
V	F	F
F	V	V

(b)

p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F

(c)

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

21. Hay a lo mas cuatro proposiciones diferentes en una variable que no son equivalentes. Las tablas de verdad de tales proposiciones son como sigue:

p	$P_1(p)$	$P_2(p)$	$P_3(p)$	$P_4(p)$
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Hallar las cuatro proposiciones dichas.

Solución:

Notese que

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Luego $P_1(p) \equiv p \vee \sim p$, $P_2(p) \equiv p$, $P_3(p) \equiv \sim p$, $P_4(p) \equiv p \wedge \sim p$.

22. Hallar el número de proposiciones diferentes no equivalentes de (1) dos variables p y q, (2) tres variables p, q y r, (3) n variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Solución:

(1) La tabla de verdad de una proposición $P(p, q)$ contendrá $2^2 = 4$ filas. En cada fila pueden aparecer V o F, así, pues, hay $2^{2^2} = 2^4 = 16$ diferentes proposiciones $P(p, q)$ no equivalentes.

(2) La tabla de verdad de una proposición $P(p, q, r)$ contendrá $2^3 = 8$ filas. Como en cada fila pueden aparecer V o F, habrá entonces $2^{2^3} = 2^8 = 256$ proposiciones diferentes no equivalentes $P(p, q, r)$.

(3) La tabla de verdad de una proposición $P(p_1, \ldots, p_n)$ tendrá 2^n filas; por consiguiente, como se vio antes, habrá en este caso 2^{2^n} diferentes proposiciones no equivalentes $P(p_1, \ldots, p_n)$.

23. Denótese con Apq $p \wedge q$ y con Np $\sim p$. Escríbanse las siguientes proposiciones empleando A y N en vez de $\wedge$ y $\sim$.

(1) $p \wedge \sim q$ (3) $\sim p \wedge (\sim q \wedge r)$

(2) $\sim(\sim p \wedge q)$ (4) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r)$

Solución:

(1) $p \wedge \sim q = p \wedge Nq = ApNq$

(2) $\sim(\sim p \wedge q) = \sim(Np \wedge q) = \sim(ANpq) = NANpq$

(3) $\sim p \wedge (\sim q \wedge r) = Np \wedge (Nq \wedge r) = Np \wedge (ANqr) = ANpANqr$

(4) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r) = \sim(ApNq) \wedge (ANqNr) = (NApNq) \wedge (ANqNr) = ANApNqANqNr$

Nótese que no hay paréntesis en la respuesta final cuando se usan A y N en vez de $\wedge$ y $\sim$. Se demuestra que no son necesarios. Y, además, como toda conectiva es lógicamente equivalente a A y N, es decir, a $\wedge$ y $\sim$, la notación anterior basta para cualquier desarrollo del álgebra de proposiciones.

24. Escribir las proposiciones siguientes utilizando $\wedge$ y $\sim$ en vez de A y N

(1) $NApq$ (3) $ApNq$ (5) $AApqr$ (7) $NAANpqr$
(2) $ANpq$ (4) $ApAqr$ (6) $ANpAqNr$ (8) $ANApAqpAANqrp$

Solución:

(1) $NApq = N(p \wedge q) = \sim(p \wedge q)$
(2) $ANpq = A(\sim p)q = \sim p \wedge q$
(3) $ApNq = Ap(\sim q) = p \wedge \sim q$
(4) $ApAqr = Ap(q \wedge r) = p \wedge (q \wedge r)$
(5) $AApqr = A(p \wedge q)r = (p \wedge q) \wedge r$
(6) $ANpAqNr = ANpAq(\sim r) = ANp(q \wedge \sim r) = A(\sim p)(q \wedge \sim r) = \sim p \wedge (q \wedge \sim r)$
(7) $NAANpqr = NAA(\sim p)qr = NA(\sim p \wedge q)r = N[(\sim p \wedge q) \wedge r] = \sim[(\sim p \wedge q) \wedge r]$
(8) $ANApAqpAANqrp = ANApAqpAA(\sim q)rp = ANApAqpA(\sim q \wedge r)p = ANApAqp[(\sim q \wedge r) \wedge p]$
$= ANAp[q \wedge p][(\sim q \wedge r) \wedge p] = AN[p \wedge (q \wedge p)][(\sim q \wedge r) \wedge p]$
$= A \sim[p \wedge (q \wedge p)][(\sim q \wedge r) \wedge p] = \sim[p \wedge (q \wedge p)] \wedge [(\sim q \wedge r) \wedge p]$

Problemas propuestos

ENUNCIADOS

25. Sea p «El es rico» y sea q «El es feliz». Expresar por enunciados verbales los siguientes enunciados simbólicos.

(1) $p \vee q$ (3) $q \rightarrow p$ (5) $q \leftrightarrow \sim p$ (7) $\sim \sim p$
(2) $p \wedge q$ (4) $p \vee \sim q$ (6) $\sim p \rightarrow q$ (8) $(\sim p \wedge q) \rightarrow p$

26. Sea p «El es rico» y sea q «El es feliz». Escribir en forma simbólica los siguientes enunciados

(1) El no es rico ni feliz.
(2) Ser pobre es ser infeliz.
(3) Uno nunca es feliz si es rico.
(4) El es pobre pero feliz
(5) El no puede ser rico y feliz
(6) Si él es infeliz es pobre.
(7) Si él no es pobre y feliz, entonces es rico.
(8) Ser rico es lo mismo que ser feliz
(9) El es pobre o bien es rico e infeliz.
(10) Si él no es pobre, entonces es feliz

27. Sea p «El es rico» y sea q «El es feliz». Escribir los siguientes enunciados condicionales en forma simbólica.

(1) Si él es pobre, él es feliz.
(2) Ser pobre implica ser feliz.
(3) Hay que ser pobre para ser feliz
(4) Ser rico es suficiente para ser feliz.
(5) Ser rico es necesario para ser feliz.
(6) El es pobre solo si es infeliz.

28. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

(1) Si $5 < 3$, entonces $-3 < -5$.
(2) No es verdad que $2 + 2 = 4$ ó $3 + 5 = 6$.
(3) Es verdad que $2 + 2 \neq 4$ y $3 + 3 = 6$.
(4) Si $3 < 5$, entonces $-3 < -5$

29. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

(1) No es verdad que si $2 + 2 = 4$ entonces $3 + 3 = 5$ ó $1 + 1 = 2$.
(2) Si $2 + 2 = 4$, entonces no es verdad que $2 + 1 = 3$ y $5 + 5 = 10$.
(3) No es verdad que $2 + 7 = 9$ si, y solo si, $2 + 1 = 5$ implica $5 + 5 = 8$.
(4) Si $2 + 2 \neq 4$, entonces no es verdad que $3 + 3 = 7$ ssi $1 + 1 = 2$.

30. Escríbase la negación de cada uno de los enunciados siguientes de la manera más simple posible.
(1) El es alto pero galán
(2) El no es rico ni feliz.
(3) Si caen los precios de las acciones, aumenta el desempleo
(4) Ni Marcos ni Enrique son ricos
(5) El tiene cabello rubio u ojos azules.
(6) El tiene cabello rubio si, y solamente si, tiene ojos azules
(7) Ambos, Marcos y Enrique son inteligentes.
(8) Si Marcos es rico, entonces, tanto Enrique como Aura son felices.
(9) Marcos o Enrique es inteligente y Aura es bonita

TABLAS DE VERDAD

31. Hacer la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

(1) $\sim p \wedge \sim q$ (3) $p \to (\sim p \vee q)$
(2) $\sim(\sim p \leftrightarrow q)$ (4) $(p \wedge \sim q) \to (\sim p \vee q)$

32. Hacer una tabla de verdad para cada proposición.

(1) $[p \wedge (\sim q \to p)] \wedge \sim[(p \leftrightarrow \sim q) \to (q \vee \sim p)]$ (2) $[p \vee (q \to \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q]$

EQUIVALENCIA LOGICA E IMPLICACION LOGICA

33. Demostrar: (1) $p \to \sim q \equiv q \to \sim p$ (3) $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
(2) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (4) $[(p \to q) \to r] \equiv [(p \wedge \sim r) \to \sim q]$

34. Establecer la verdad o falsedad de lo que sigue:

(1) $p \wedge q \Rightarrow p$ (2) $p \vee q \Rightarrow p$ (3) $q \Rightarrow p \to q$

35. Demostrar (construyendo las tablas de verdad necesarias):

(1) $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \to p$ (3) $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$
(2) $\sim p \Rightarrow p \to q$ (4) $q \Rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$

36. Demostrar. Para toda proposición $P(p, q, \ldots)$, $p \wedge P(p, q, \ldots) \Rightarrow p$.

37. Si Apq denota $p \wedge q$ y Np, $\sim p$ (véase Problema 23), escribir las proposiciones siguientes con A y N en vez de $\wedge$ y $\sim$.

(1) $\sim p \wedge q$ (4) $\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)$
(2) $p \wedge \sim(p \wedge q)$ (5) $[p \wedge \sim(p \wedge \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$
(3) $\sim(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$ (6) $(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim[(p \wedge q) \wedge (\sim q \wedge p)]$

38. Escribir las proposiciones que siguen con $\wedge$ y $\sim$ en vez de A y N.

(1) $NApNq$ (3) $AApNrAqNp$ (5) $ANAApAqNrpAqr$
(2) $ANApqNp$ (4) $ANANqANpqNp$ (6) $ANANpNAqNrApNAqNr$

Respuestas a los problemas propuestos

26. (2) $\sim p \leftrightarrow \sim q$, (5) $\sim(p \wedge q)$, (9) $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

27. (3) $q \to \sim p$, (4) $p \to q$, (6) $\sim p \to \sim q$

29. (1) F, (2) F, (3) Ambigua. (4) V

30. (2) El es rico o feliz. (8) Marcos es rico, y Enrique o Aura son infelices

31. (2) V F F V, (4) V F V V

32. (1) F V F F

33. *Sugerencia:* Construir tablas de verdad.

34. (1) Verdadero. (2) Falso. (3) Verdadero.

37. (2) $ApNApq$, (4) $ANApqNANpNq$, (6) $AANpNqNAApqANqp$

38. (2) $\sim(p \wedge q) \wedge \sim p$, (4) $\sim[\sim q \wedge (\sim p \wedge q)] \wedge \sim p$, (6) $\sim[\sim p \wedge \sim(q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge \sim(q \wedge \sim r)]$

Capítulo 15

Cuantificadores

FUNCIONES LOGICAS Y CONJUNTOS DE VALIDEZ

Sea A un conjunto dado, explícita o implícitamente. Una *función lógica*, o simplemente un *enunciado formal* sobre A es una expresión que se denota por

$$p(x)$$

que tiene la propiedad de que $p(a)$ es verdadera o falsa para todo $a \varepsilon A$. En otras palabras, $p(x)$ es una función lógica sobre A si $p(x)$ se convierte en un enunciado al sustituir la variable x por un elemento $a \varepsilon A$.

Ejemplo 1-1: Sea $p(x)$ «$x + 2 > 7$». Así, pues, $p(x)$ es una función lógica sobre N, el conjunto de los números naturales.

Ejemplo 1-2: Sea $p(x)$ «$x + 2 > 7$» Entonces $p(x)$ no es una función lógica sobre C, el conjunto de los números complejos, pues las desigualdades no se definen para todos los números complejos

Si $p(x)$ es una función lógica sobre un conjunto A, entonces el conjunto de elementos $a \varepsilon A$ que tienen la propiedad de que $p(a)$ es verdadero, se llama *conjunto de validez* V_p de $p(x)$ En otras palabras,

$$V_p = \{x \mid x \varepsilon A,\ p(x) \text{ es verdadero}\}$$

o, simplemente,

$$V_p = \{x \mid p(x)\}$$

Ejemplo 1-3: Considerese la función lógica «$x + 2 > 7$» definida sobre N, el conjunto de los numeros naturales. Entonces

$$\{x \mid x \varepsilon N,\ x+2>7\} = \{6, 7, 8, \ldots\}$$

es el conjunto de validez

Ejemplo 1-4: Sea $p(x)$ «$x + 5 < 3$» Entonces el conjunto de validez de $p(x)$ sobre N es

$$\{x \mid x \varepsilon N,\ x+5<3\} = \emptyset$$

el conjunto vacio

Ejemplo 1-5: Sea $p(x)$ «$x + 5 > 1$». El conjunto de validez de $p(x)$ sobre N es

$$\{x \mid x+5>1\} = N$$

Es de notar, por los ejemplos anteriores, que si $p(x)$ es una función lógica definida sobre un conjunto A, entonces $p(x)$ puede ser verdad para todos los $x \varepsilon A$, para algunos $x \varepsilon A$ o para ningún $x \varepsilon A$.

CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Sea $p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A. Entonces

$$(\forall x \varepsilon A)\, p(x) \quad \text{o} \quad \forall_x\, p(x) \quad \text{o} \quad \forall x,\ p(x) \tag{1}$$

es un enunciado que dice «Para todo elemento x de A, $p(x)$ es un enunciado verdadero», o, simplemente, «Para todo x, $p(x)$». El simbolo $\forall$

que se lee «para todo» se llama *cuantificador universal*. Nótese que (*1*) es equivalente a la aserción conjuntista de que el conjunto de validez de $p(x)$ es todo el conjunto A, esto es,

$$V_p = \{x \mid x \varepsilon A,\ p(x)\} = A \tag{2}$$

Ejemplo 2-1: Sea M el conjunto de los hombres. Entonces «Todo hombre es mortal», se puede escribir

$$(\forall x \varepsilon M)(x \text{ es mortal})$$

Nótese que $p(x)$, por sí solo, es un enunciado formal y, por consiguiente, no tiene un valor de verdad. Pero $p(x)$ con el cuantificador $\forall$ precediéndole, es decir, $\forall x\, p(x)$, es un enunciado y tiene un valor de verdad. A la vista de la equivalencia de los enunciados *(1)* y *(2)*, queda establecido que

Q$_1$: Si $\{x \mid x \in A,\ p(x)\} = A$, entonces $\forall x\, p(x)$ es verdadero; si $\{x \mid x \in A,\ p(x)\} \neq A$, entonces $\forall x\, p(x)$ es falso.

Ejemplo 2-2: La proposición $(\forall n \in N)(n + 4 > 3)$ donde N es el conjunto de los números naturales, es verdadera porque

$$\{n \mid n+4>3\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = N$$

Ejemplo 2-3: La proposición $\forall n\,(n + 2 > 8)$ es falsa, pues

$$\{n \mid n+2>8\} = \{7, 8, 9, \ldots\} \neq N$$

Ejemplo 2-4: El símbolo $\forall$ se puede emplear para definir la intersección de una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ como sigue

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Sea $p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A. Entonces

$$(\exists x \in A)\, p(x) \qquad \text{o} \qquad \exists_x\, p(x) \qquad \text{o} \qquad \exists x\, p(x) \qquad (1)$$

es una proposición que se lee «Existe un $x \in A$ tal que $p(x)$ es un enunciado verdadero» o, simplemente, «Para algún x, $p(x)$». El símbolo

$$\exists$$

que se lee «existe» o «para algún» o «para al menos un» se llama *cuantificador existencial*. Nótese que *(1)* es equivalente a la afirmación conjuntista de que el conjunto de validez de $p(x)$ no es vacío, es decir,

$$V_p = \{x \mid x \in A,\ p(x)\} \neq \emptyset$$

Por tanto,

Q$_2$: Si $\{x \mid p(x)\} \neq \emptyset$, entonces $\exists x\, p(x)$ es verdadero; si $\{x \mid p(x)\} = \emptyset$, entonces $\exists x\, p(x)$ es falso.

Ejemplo 3-1: El enunciado $(\exists n \in N)(n + 4 < 7)$

es verdadero porque $\{n \mid n+4<7\} = \{1, 2\} \neq \emptyset$

Ejemplo 3-2: La proposición $\exists n(n + 6 < 4)$ es falsa porque $\{n \mid n + 6 < 4\} = \emptyset$

Ejemplo 3-3: El símbolo $\exists$ puede usarse para definir la unión de una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ como sigue:

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

Observación 15-1: El símbolo $\ni$ se usa frecuentemente en vez de las palabras «tal que» en muchos enunciados en que aparece el cuantificador existencial $\exists$. Por ejemplo, el enunciado «Existe un número natural n tal que $50 < n^2 < 100$» se escribe entonces

$$\exists n \in N \ni 50 < n^2 < 100$$

NEGACION DE PROPOSICIONES QUE CONTIENEN CUANTIFICADORES

La negación de la proposición «Todo hombre es mortal» es «No es verdad que todo hombre es mortal»; es decir, existe al menos un hombre que no es mortal. Simbólicamente entonces, si M denota el conjunto de los hombres, entonces las sobredichas proposiciones se pueden escribir

$$\sim(\forall x \in M)(x \text{ es mortal}) \equiv (\exists x \in M)(x \text{ no es mortal})$$

Mejor aún, si $p(x)$ significa «x es mortal», se puede escribir

$$\sim(\forall x \in M)\,p(x) \;\equiv\; (\exists x \in M)\sim p(x) \qquad \text{o} \qquad \sim\forall_x\, p(x) \;\equiv\; \exists_x \sim p(x)$$

Cosa que, en general, es verdadera. Así, pues,

Teorema (De Morgan) 15-1: $\sim(\forall x \in A)\,p(x) \equiv (\exists x \in A)\sim p(x)$.

Hay un teorema análogo para la negación de una proposición que contiene el cuantificador existencial.

Teorema (De Morgan) 15-2: $\sim(\exists x \in A)\,p(x) \equiv (\forall x \in A)\sim p(x)$.

O sea que el enunciado

«No es verdad que, para todo $a \in A$, $p(a)$ es verdadero»

es equivalente al enunciado

«Existe un $a \in A$ tal que $p(a)$ es falso»

De igual modo, el enunciado

«No es verdad que existe un $a \in A$ tal que $p(a)$ es verdadero»

es equivalente al enunciado

«Para todo $a \in A$, $p(a)$ es falso»

Ejemplo 4-1: La negacion de la proposición «Para todo número natural n, $n + 2 > 8$ es equivalente a la proposición «Existe un n tal que $n + 2 \not> 8$». Es decir, que

$$\sim(\forall n \in N)(n + 2 > 8) \equiv (\exists n \in N)(n + 2 \leq 8)$$

Ejemplo 4-2: La negación del enunciado «Existe un planeta habitable» es el enunciado «Todos los planetas son inhabitables». En otras palabras, si P es el conjunto de los planetas, entonces

$$\sim(\exists x \in P)(x \text{ es habitable}) \equiv (\forall x \in P)(x \text{ no es habitable})$$

Observación 15-2: Aquí el significado de $\sim p(x)$ es obvio, pues es la función lógica que se obtiene escribiendo «No es verdad que . . .» antes de $p(x)$. Nótese que el conjunto de validez de $\sim p(x)$ es el complemento del conjunto de validez de $p(x)$, porque

si $p(a)$ es verdadero, entonces $\sim p(a)$ es falso

y viceversa. Si antes $\sim$ era una operación de enunciados, ahora es una operación de funciones lógicas.

Teniendo en cuenta además que $p(x) \wedge q(x)$ se lee «$p(x)$ y $q(x)$» y que $p(x) \vee q(x)$ se lee «$p(x)$ o $q(x)$», se puede demostrar que las mismas leyes de las proposiciones valen para las funciones lógicas, por ejemplo $\sim(p(x) \wedge q(x)) \equiv \sim p(x) \vee \sim q(x)$.

CONTRAEJEMPLO

Por el Teorema 15-1, $\sim\forall x,\, p(x) \equiv \exists x \sim p(x)$. Por tanto, para demostrar que un enunciado $\forall x,\, p(x)$ es falso, da lo mismo demostrar que $\exists x \sim p(x)$ es verdadero, esto es, que existe un elemento x_0 tal que $p(x_0)$ es falso. Un elemento x_0 semejante se dice un *contraejemplo* del enunciado $\forall x,\, p(x)$.

Ejemplo 5-1: Sea el enunciado $\forall x,\, |x| \neq 0$. El enunciado es falso porque el número 0 es un contraejemplo, es decir, $|0| \neq 0$ no es verdadero.

Ejemplo 5-2: Sea el enunciado $\forall x,\, x^2 > x$. Este enunciado no es verdadero, ya que, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es un contraejemplo, es decir, $(\frac{1}{2})^2 \not> \frac{1}{2}$.

NOTACION

Sea $A = \{2, 3, 5\}$ y sea $p(x)$ «x es un número primo». Entonces la proposición

«Dos es un número primo y tres es un número primo y cinco es un número primo» (1)

se puede denotar por

$$p(2) \wedge p(3) \wedge p(5) \quad \equiv \quad \wedge_{a \in A}\, p(a)$$

Análogamente, la proposición

«Dos es un número primo o tres es un número primo o cinco es un número primo» (2)

se puede denotar por

$$p(2) \vee p(3) \vee p(5) \quad \equiv \quad \vee_{a \in A}\, p(a)$$

Pero (1) es equivalente al enunciado

«Todo número de A es primo» (3)

y (2) es equivalente al enunciado

«Al menos un número de A es primo»

De otra manera,

$$\wedge_{a \in A}\, p(a) \quad \equiv \quad \forall_{a \in A}\, p(a)$$
$$\vee_{a \in A}\, p(a) \quad \equiv \quad \exists_{a \in A}\, p(a)$$

así que los símbolos $\wedge$ y $\vee$ se usan a veces en vez de $\forall$ y $\exists$.

Observación 15-3: Si A fuera un conjunto infinito, un enunciado de la forma (1) no sería factible porque nunca terminaría; pero en cambio siempre se puede hacer un enunciado de la forma (3) aun cuando A es infinito.

FUNCIONES LOGICAS QUE CONTIENEN MAS DE UNA VARIABLE

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se llama función lógica (de n variables) sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ una expresión denotada por

$$p(x_1, \ldots, x_n)$$

tal que $p(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadera o falsa para todo n-tuple ordenado $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$.

Ejemplo 6-1: Sea M el conjunto de hombres y W el de mujeres. Entonces «x está casado con y» es una función lógica sobre $M \times W$.

Ejemplo 6-2: Sea N el conjunto de los números naturales. Entonces «$x + 2y + 3z = 18$» es una función lógica sobre $N \times N \times N$.

Principio fundamental: Una función lógica precedida de cuantificadores para cada variable, por ejemplo,

$$\forall x\, \exists y\, p(x, y) \qquad \text{o} \qquad \exists x\, \forall z\, \forall y\, p(x, y, z)$$

es un enunciado y tiene un valor de verdad.

Ejemplo 6-3: Sea M = {Enrique, Marcos, Pablo}, sea W = {Carmen, Aura} y sea $p(x, y)$ «x es el hermano de y». Entonces

$$\forall x \in M[\exists y \in W\;\; p(x, y)] \quad \equiv \quad \forall x \in M\; \exists\, y \in W\;\; p(x, y)$$

significa «Para todo x de M existe un y de W tal que x es el hermano de y». En otras palabras, todo elemento de M es el hermano o bien de Carmen, o bien de Aura.

Ejemplo 6-4: Sean M, W y $p(x, y)$ como en el Ejemplo 6-3. Entonces

$$\exists\, y \in W\;\; \forall\, x \in M\;\; p(x, y)$$

afirma que al menos una de las mujeres de W es la hermana de todos los hombres de M. Así, pues, un orden diferente de los cuantificadores da lugar a una proposición diferente.

La negación de una proposición que contiene cuantificadores puede averiguarse como sigue

$$\sim \forall x\, [\exists y\; p(x, y)] \quad \equiv \quad \exists\, x \sim [\exists y\; p(x, y)] \quad \equiv \quad \exists\, x\;\, \forall y \sim p(x, y)$$

Ejemplo 6-5: Sean M, W y $p(x, y)$ como en el Ejemplo 6-3. Entonces

$$\sim \forall\, x \in M\; \exists\, y \in W\;\; p(x, y) \quad \equiv \quad \exists\, x \in M\; \forall\, y \in W\;\; \sim p(x, y)$$

En otras palabras, el enunciado «Es falso que todo hombre es el hermano de al menos una mujer» es equivalente a «Al menos uno de los hombres no es el hermano de ninguna mujer».

Problemas resueltos

1. Si $p(x)$ denota el enunciado «$x + 2 > 5$», establecer si $p(x)$ es o no una función lógica sobre cada uno de los siguientes conjuntos: (1) N, el conjunto de los números naturales, (2) $M = \{-1, -2, -3, \ldots\}$, (3) C, el conjunto de los números complejos.

Solución:

(1) Sí. (2) Aunque $p(x)$ es falso para todo elemento de M, $p(x)$ es de todos modos una función lógica sobre M. (3) No. Nótese que $2i + 2 > 5$ no tiene ningún sentido. Es decir, entre números complejos no está definida la desigualdad.

2. Determinar el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados. (Aquí el conjunto universal es el de los números reales.)

(1) $\forall x, |x| = x$ (3) $\forall x, x+1 > x$ (5) $\exists x, |x| = 0$

(2) $\exists x, x^2 = x$ (4) $\exists x, x+2 = x$

Solución:

(1) Falso. Nótese que si $x_0 = -3$, entonces $|x_0| \neq x_0$.
(2) Verdadero. Porque si $x_0 = 1$, entonces $x_0^2 = x_0$.
(3) Verdadero. Porque todo número real es solución de $x + 1 > x$.
(4) Falso. No existe solución para $x + 2 = x$.
(5) Verdadero. Porque si $x_0 = 0$, entonces $|x_0| = 0$.

3. Negar los enunciados del Problema 2.

Solución:

(1) $\sim\forall x, |x| = x \;\equiv\; \exists x \sim(|x| = x) \;\equiv\; \exists x, |x| \neq x$
(2) $\sim\exists x, x^2 = x \;\equiv\; \forall x \sim(x^2 = x) \;\equiv\; \forall x, x^2 \neq x$
(3) $\sim\forall x, x+1 > x \;\equiv\; \exists x \sim(x+1 > x) \;\equiv\; \exists x, x+1 \leq x$
(4) $\sim\exists x, x+2 = x \;\equiv\; \forall x \sim(x+2 = x) \;\equiv\; \forall x, x+2 \neq x$
(5) $\sim\exists x, |x| = 0 \;\equiv\; \forall x \sim(|x| = 0) \;\equiv\; \forall x, |x| \neq 0$

4. Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, hallar el valor de verdad de los siguientes enunciados.

(1) $(\exists x \in A)(x+3 = 10)$ (3) $(\exists x \in A)(x+3 < 5)$

(2) $(\forall x \in A)(x+3 < 10)$ (4) $(\forall x \in A)(x+3 \leq 7)$

Solución:

(1) Falso. Ningún número de A es solución de $x + 3 = 10$.
(2) Verdadero. Todo número de A satisface a $x + 3 < 10$.
(3) Verdadero. Pues si $x_0 = 1$, entonces $x_0 + 3 < 5$, o sea que 1 es una solución.
(4) Falso. Porque si $x_0 = 5$, entonces $x_0 + 3 \not\leq 7$. En otras palabras, 5 no es solución de la condición dada.

5. Negar los enunciados del Problema 4.

Solución:

(1) $\sim(\exists x \in A)(x+3 = 10) \;\equiv\; (\forall x \in A) \sim(x+3 = 10) \;\equiv\; (\forall x \in A)(x+3 \neq 10)$
(2) $\sim(\forall x \in A)(x+3 < 10) \;\equiv\; (\exists x \in A) \sim(x+3 < 10) \;\equiv\; (\exists x \in A)(x+3 \geq 10)$
(3) $\sim(\exists x \in A)(x+3 < 5) \;\equiv\; (\forall x \in A) \sim(x+3 < 5) \;\equiv\; (\forall x \in A)(x+3 \geq 5)$
(4) $\sim(\forall x \in A)(x+3 \leq 7) \;\equiv\; (\exists x \in A) \sim(x+3 \leq 7) \;\equiv\; (\exists x \in A)(x+3 > 7)$

6. Negar los enunciados: (1) $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, (2) $\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(x)$.

Solución:

(1) Nótese que $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; entonces

$$\sim(\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)) \;\equiv\; \sim\forall x\, p(x) \vee \sim\exists y\, q(y) \;\equiv\; \exists x \sim p(x) \vee \forall y \sim q(y)$$

(2) Nótese que $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$; entonces

$$\sim(\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)) \;\equiv\; \sim\exists x\, p(x) \wedge \sim\forall y\, q(y) \;\equiv\; \forall x \sim p(x) \wedge \exists y \sim q(y)$$

7. Negar los siguientes enunciados.

(1) Si hay un motín, alguien es muerto.

(2) Es de día y todo el mundo se ha levantado.

Solución:

(1) Nótese que $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$. Por tanto:

«Es falso que es de día y todo el mundo está levantado»
$\equiv$ «No es de día o es falso que todo el mundo está levantado»
$\equiv$ «Hay un motín y todos están vivos»

(2) Nótese que $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$. Por tanto:

«Es falso que es de día y todo mundo está levantado»
$\equiv$ «No es de día o es falso que todo mundo está levantado»
$\equiv$ «Es de noche o alguien no está levantado»

8. Hallar un contraejemplo para cada uno de los enunciados siguientes. Aquí $B = \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$.

(1) $\forall x \in B,\ x + 5 < 12$

(2) $\forall x \in B$, x es primo

(3) $\forall x \in B,\ x^2 > 1$

(4) $\forall x \in B$, x es par

Solución:

(1) Si $x_0 = 7$, 8 ó 9, entonces $x_0 + 5 < 12$ no es verdadero; y cualquiera de los 7, 8 ó 9 es un contraejemplo.
(2) Como 4 no es primo, 4 es un contraejemplo.
(3) El enunciado es verdadero; así que no hay contraejemplo
(4) Siendo 3 impar, 3 es un contraejemplo.

9. Sea $\{1, 2, 3\}$ el conjunto universal. Averiguar el valor de verdad de los enunciados siguientes.

(1) $\exists x\ \forall y,\ x^2 < y + 1$

(2) $\forall x\ \exists y,\ x^2 + y^2 < 12$

(3) $\forall x\ \forall y,\ x^2 + y^2 < 12$

(4) $\exists x\ \forall y\ \exists z,\ x^2 + y^2 < 2z^2$

(5) $\exists x\ \exists y\ \forall z,\ x^2 + y^2 < 2z^2$

Solución:

(1) Verdadero. Porque si $x = 1$, entonces $1 < y + 1$ tiene como soluciones los números 1, 2 y 3
(2) Verdadero. Pues para cada x_0, sea $y = 1$; entonces $x_0^2 + 1 < 12$ es un enunciado verdadero.
(3) Falso. Porque si $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$, entonces $x_0^2 + y_0^2 < 12$ que no es enunciado verdadero
(4) Verdadero. Pues si $x_0 = 1$ y $z_0 = 3$, entonces el conjunto de validez de $x_0^2 + y^2 < 2z_0^2$, esto es, $1 + y^2 < 18$ es el conjunto universal $\{1, 2, 3\}$.
(5) Falso. Pues si $z_0 = 1$, entonces $x^2 + y^2 < 2x_0^2$ carece de solución

10. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Considerando los siguientes enunciados formales decir del que es enunciado, si es verdadero o falso; y para el que sea una función lógica determinar el conjunto de validez

(1) $(\forall x \in A)(\exists y \in A) \ni (x + y < 14)$

(2) $(\forall y \in A)(x + y < 14)$

(3) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 14)$

(4) $(\exists y \in A)(x + y < 14)$

Solución:

(1) El enunciado formal en dos variables está precedido de dos cuantificadores, es, pues, un enunciado, que, además, es verdadero.
(2) El enunciado formal está precedido por un cuantificador, así que es una función lógica de la otra variable. Nótese que para todo $y \in A$, $x_0 + y < 14$ si, y solamente si, $x_0 = 1$, 2 ó 3. Así que el conjunto de validez es $\{1, 2, 3\}$
(3) Es un enunciado y es falso. Porque si $x_0 = 8$ e $y_0 = 9$, entonces $x_0 + y_0 < 14$ no es verdadero
(4) Es un enunciado formal en x. El conjunto de validez es A mismo.

11. Negar los siguientes enunciados.

(1) $\exists x \, \forall y, \; p(x,y)$
(2) $\forall x \, \forall y, \; p(x,y)$
(3) $\exists y \, \exists x \, \forall z, \; p(x,y,z)$
(4) $\forall x \, \exists y \, (p(x) \vee q(y))$
(5) $\exists x \, \forall y \, (p(x,y) \rightarrow q(x,y))$
(6) $\exists y \, \exists x \, (p(x) \wedge \sim q(y))$

Solución:

(1) $\sim(\exists x \, \forall y, \; p(x,y)) \;\equiv\; \forall x \, \exists y \, \sim p(x,y)$
(2) $\sim(\forall x \, \forall y, \; p(x,y)) \;\equiv\; \exists x \, \exists y \, \sim p(x,y)$
(3) $\sim(\exists y \, \exists x \, \forall z, \; p(x,y,z)) \;\equiv\; \forall y \, \forall x \, \exists z \, \sim p(x,y,z)$
(4) $\sim[(\forall x \, \exists y \, (p(x) \vee q(y))] \;\equiv\; \exists x \, \forall y \, \sim(p(x) \vee q(y)) \;\equiv\; \exists x \, \forall y \, (\sim p(x) \wedge \sim q(y))$
(5) $\sim[\exists x \, \forall y \, (p(x,y) \rightarrow q(x,y))] \;\equiv\; \forall x \, \exists y \, \sim(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \;\equiv\; \forall x \, \exists y \, (p(x,y) \wedge \sim q(x,y))$
(6) $\sim[\exists y \, \exists x \, (p(x) \wedge \sim q(y))] \;\equiv\; \forall y \, \forall x \, \sim(p(x) \wedge \sim q(y)) \;\equiv\; \forall y \, \forall x \, (\sim p(x) \vee q(y))$

12. Dado el enunciado siguiente, que es la definición de que la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ tiene por límite cero.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \; (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \epsilon)$$

Negar dicho enunciado.

Solución:

$$\begin{aligned} \sim[\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \; (n > n_0 \rightarrow |a_n| < \epsilon)] &\equiv \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \; \exists n \; \sim(n > n_0 \rightarrow |a_n| < \epsilon) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \; \exists n \; (n > n_0 \wedge \sim(|a_n| < \epsilon)) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \; \forall n_0 \; \exists n \; (n > n_0 \wedge |a_n| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Problemas propuestos

13. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados. (Aquí el conjunto universal es el de los números reales.)

(1) $\forall x, \; x^2 = x$
(2) $\exists x, \; 2x = x$
(3) $\exists x, \; x^2 + 3x - 2 = 0$
(4) $\forall x, \; x - 3 < x$
(5) $\exists x, \; x^2 - 2x + 5 = 0$
(6) $\forall x, \; 2x + 3x = 5x$

14. Negar los enunciados del Problema 13

15. Sea {1, 2, 3, 4} el conjunto universal. Determinar el valor de verdad de cada enunciado

(1) $\forall x, \; x + 3 < 5$
(2) $\exists x, \; x + 3 < 5$
(3) $\forall x, \; x^2 - 10 \leq 8$
(4) $\exists x, \; 2x^2 + x = 15$

16. Negar los enunciados del Problema 15.

17. Negar los enunciados: (1) $\forall x \; p(x) \wedge \exists x \; q(x)$, (2) $\exists y \; p(y) \rightarrow \forall x \sim q(x)$, (3) $\exists x \sim p(x) \vee \forall x \; q(x)$.

18. Negar los siguientes enunciados.

(1) Si el maestro está ausente, algunos estudiantes no terminan su tarea.
(2) Todos los estudiantes terminaron su tarea y el maestro está presente
(3) Algunos estudiantes no terminaron su tarea o el maestro está ausente

19. Dar un contraejemplo para cada enunciado falso. Aquí es {3, 5, 7, 9} el conjunto universal

(1) $\forall x, \; x + 3 \geq 7$
(2) $\forall x$, es impar
(3) $\forall x$, x es primo
(4) $\forall x, \; |x| = x$

20. Negar los enunciados del Problema 19.

21. Sea $\{1, 2, 3\}$ el conjunto universal. Determinar el valor de verdad de cada enunciado

(1) $\forall x \; \forall y, \; x^2 + 2y < 10$ (3) $\forall x \; \exists y, \; x^2 + 2y < 10$
(2) $\exists x \; \forall y, \; x^2 + 2y < 10$ (4) $\exists x \; \exists y, \; x^2 + 2y < 10$

22. Negar los enunciados del Problema 21.

23. Negar los siguientes enunciados:

(1) $\forall x \; \exists y \; \forall z \; p(x, y, z)$ (3) $\forall x \; \exists y \; (p(x, y) \rightarrow q(y))$
(2) $\exists x \; \forall y \; (p(x) \vee \sim q(y))$ (4) $\exists x \; \exists y \; (p(x) \wedge q(y))$

24. Sea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ el conjunto universal. Hallar el conjunto de validez de las siguientes funciones lógicas

(1) $\exists x, \; 2x + y < 7$ (3) $\forall x, \; 2x + y < 10$
(2) $\exists y, \; 2x + y < 7$ (4) $\forall y, \; 2x + y < 10$

Respuestas a los problemas propuestos

13. (2) V, (5) F

14. (1) $\exists x, \; x^2 \neq x$ (4) $\exists x, \; x - 3 \geq x$ (5) $\forall x, \; x^2 \;\; 2x + 5 \neq 0$

15. (1) F, (3) V

16. (2) $\forall x, \; x + 3 \geq 6$ (3) $\exists x, \; x^2 - 10 > 8$

17. (2) $\exists y \; p(y) \wedge \exists x \; q(x)$ (3) $\forall x \; p(x) \wedge \exists x \sim q(x)$

18. (1) El maestro está ausente y todos los estudiantes terminaron sus tareas.
(2) Algunos estudiantes no terminaron su tarea o el maestro está ausente.
(3) Todos los estudiantes terminaron su tarea y el maestro está presente.

19. (1) 3, (3) 9

20. (1) $\exists x, \; x + 3 < 7$ (3) $\exists x$, x no es primo
(2) $\exists x$, x es par (4) $\exists x, \; |x| \neq x$

21. (2) V, (3) F

23. (2) $\forall x \; \exists y \; (\sim p(x) \wedge q(y))$ (3) $\exists x \; \forall y \; (p(x, y) \wedge \sim q(y))$

24. (1) $\{1, 2, 3, 4\}$, (2) $\{1, 2\}$, (3) $\emptyset$, (4) $\{1, 2\}$

Capítulo 16

Algebra booliana

DEFINICION

Se ha visto que los conjuntos y las proposiciones poseen propiedades análogas, es decir, que cumplen leyes idénticas. Son estas leyes las que se emplean para definir una estructura matemática abstracta llamada álgebra booliana, por el nombre del matemático George Boole (181[illegible]-1864).

Definición 16-1: Un álgebra booliana es un conjunto B de elementos $a, b, \ldots$ dotado de dos operaciones binarias llamadas *suma* y *producto*, que se denotan respectivamente por $+$ y $*$ tal que:

B_0. **Ley de clausura:** Para cualesquiera $a, b \in B$, la suma $a + b$ y el producto $a * b$ existen y son elementos únicos de B.

B_1. **Ley conmutativa:**

(1a) $a + b = b + a$ (1b) $a * b = b * a$

B_2. **Ley asociativa:**

(2a) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (2b) $(a * b) * c = a * (b * c)$

B_3. **Ley distributiva:**

(3a) $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$ (3b) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

B_4. **Elementos neutros:** Existen un neutro aditivo 0 y un neutro multiplicativo U tales que, para todo $a \in B$,

(4a) $a + 0 = a$ (4b) $a * U = a$

B_5. **Complemento:** Para todo $a \in B$ existe un $a' \in B$ llamado *complemento* de a tal que

(5a) $a + a' = U$ (5b) $a * a' = 0$

Observación 16-1: Nótese que, por definición, una operación binaria cumple la ley de clausura; no era, pues, necesario establecer explícitamente el axioma B_0.

Ejemplo 1-1: Sea $B = \{1, 0\}$ y sean las dos operaciones $+$ y $*$ definidas como sigue

+	1	0
1	1	1
0	1	0

*	1	0
1	1	0
0	0	0

Entonces B, o más precisamente, la terna $(B, +, *)$ es un álgebra booliana.

Ejemplo 1-2: Sea $\mathscr{A}$ una familia de conjuntos cerrada respecto de las operaciones de unión, intersección y complemento. Entonces $(\mathscr{A}, \cup, \cap)$ es un álgebra booliana. Nótese que el conjunto universal es aquí el elemento unidad y que el conjunto vacío $\varnothing$ es el elemento cero.

Ejemplo 1-3: Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de las proposiciones generadas por las variables $p, q, \ldots$ Entonces $(\mathscr{B}, \vee, \wedge)$ es un álgebra booliana.

Observación 16-2: Como conjuntos y proposiciones son ejemplos clásicos de álgebras boolianas, muchos textos denotan las operaciones de un álgebra booliana por $\vee$ y $\wedge$ o por $\cup$ y $\cap$.

DUALIDAD EN UN ALGEBRA BOOLIANA

Por definición, el dual de un enunciado en un álgebra booliana $(B, +, *)$ es el enunciado que resulta intercambiando $+$ y $*$ y los elementos neutros U y 0 en el enunciado original, por ejemplo, el dual de

$$(U + a) * (b + 0) = b$$

es

$$(0 * a) + (b * U) = b$$

Nótese que el dual de cada axioma de un álgebra booliana es también un axioma. Así, pues, es válido el principio de dualidad:

Teorema (principio de dualidad): El dual de un teorema en un álgebra booliana es también un teorema.

O sea que, si un enunciado es una consecuencia de los axiomas de un algebra booliana, entonces el dual es también una consecuencia de aquellos axiomas, porque el enunciado dual se puede demostrar mediante el dual, en cada paso, de la demostración del enunciado primitivo.

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Si bien los cinco axiomas B_1-B_5 no abarcan todas las propiedades de los conjuntos y de las proposiciones enumeradas en las páginas 104 y 195, las otras propiedades son una consecuencia directa de los axiomas B_1-B_5, a saber,

Teorema 16-1-1 (ley de idempotencia): (i) $a + a = a$ (ii) $a * a = a$

Teorema 16-1-2: (i) $a + U = U$ (ii) $a * 0 = 0$

Teorema 16-1-3 (ley de involución): $(a')' = a$

Teorema 16-1-4: (i) $U' = 0$ (ii) $0' = U$

Teorema 16-1-5 (ley de De Morgan): (i) $(a + b)' = a' * b'$ (ii) $(a * b)' = a' + b'$

ORDEN EN UN ALGEBRA BOOLIANA

Considérese el teorema siguiente:

Teorema 16-2: Sea $a, b \in B$ un álgebra booliana. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(1)\ a * b' = 0, \quad (2)\ a + b = b, \quad (3)\ a' + b = U, \quad (4)\ a * b = a$$

Véase el Problema 9 para la demostración.

En vista del teorema anterior, se introduce la definición que sigue:

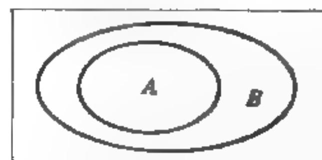
Definición 16-2: Sea $a, b \in B$ un álgebra booliana. Se dice entonces que a es *anterior* a b, denotado

$$a \precsim b$$

si es válida una de las propiedades del Teorema 16-2

Ejemplo 2-1: Considerando un álgebra booliana de conjuntos $(\mathscr{A}, \cup, \cap)$, entonces A es anterior a B significa que $A \subset B$. Es decir, el Teorema 16-2 afirma que si A es un subconjunto de B, como se ilustra en el diagrama de Venn adjunto, entonces se verifica que:

(1) $A \cap B' = \emptyset$ (3) $A' \cup B = U$
(2) $A \cup B = B$ (4) $A \cap B = A$



A es un subconjunto de B

Ejemplo 2-2: Considérese un álgebra booliana de proposiciones $(\mathscr{A}, \vee, \wedge)$. Entonces p es anterior a q significa que p implica lógicamente a q, es decir, que $p \Rightarrow q$.

Teorema 16-3: La relación definida en un álgebra booliana por $a \precsim b$ es una relación de orden parcial en B, es decir,

(1) $a \precsim a$ para todo $a \in B$ (Ley reflexiva)
(2) $a \precsim b$ y $b \precsim a$ implican $a = b$ (Ley antisimétrica)
(3) $a \precsim b$ y $b \precsim c$ implican $a \precsim c$ (Ley transitiva)

Si no se dice otra cosa, se supone que un álgebra booliana está ordenada parcialmente por la anterior definición.

La relación entre las propiedades del orden parcial en un álgebra booliana B y las operaciones de B se dan en el siguiente teorema.

Teorema 16-4: Sea $a, b \in B$ un álgebra booliana. Entonces

(i) $a + b = \sup\{a, b\}$ **(ii)** $a * b = \inf\{a, b\}$

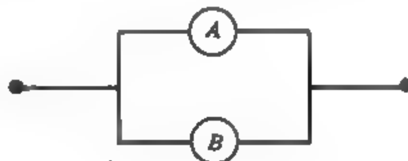
Observación 16-3: Un conjunto parcialmente ordenado A tal que para cualesquiera elementos $a, b \in A$ existen $\inf\{a, b\}$ y $\sup\{a, b\}$, se llama *retículo*. Así, pues, un álgebra booliana es un tipo especial de retículo.

DISEÑOS DE CIRCUITOS CONMUTADORES

Sean A, B sendos interruptores eléctricos y sean A y A' interruptores tales que cuando el uno está abierto el otro está cerrado, y viceversa. Dos interruptores, A y B, por ejemplo, se pueden conectar por un alambre en serie o en paralelo, como se muestra en seguida:



Conexión en serie, $A \wedge B$



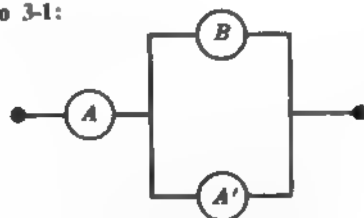
Conexión en paralelo, $A \vee B$

Sean $A \wedge B$ y $A \vee B$

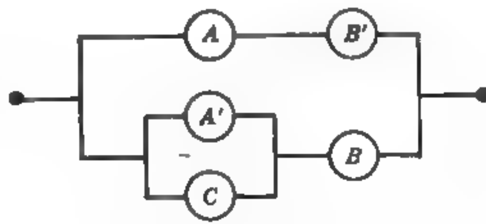
la indicación de que A y B están en serie y de que A y B están en paralelo, respectivamente.

Un circuito conmutador booliano es un dispositivo de alambres e interruptores que se puede construir mediante combinaciones en serie y en paralelo; por tanto, se le puede describir con las conectivas $\wedge$ y $\vee$.

Ejemplo 3-1:



(1): $A \wedge (B \vee A')$



(2): $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$

El circuito (1) se puede describir por $A \wedge (B \vee A')$ y el circuito (2) por $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$

Indíquese ahora por 1 y 0

respectivamente, que un interruptor o circuito está cerrado o abierto. Las dos tablas siguientes describen el funcionamiento de un circuito en serie $A \wedge B$ y de uno en paralelo $A \vee B$.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La tabla siguiente muestra la relación entre un interruptor A y un interruptor A'.

A	A'
1	0
0	1

Nótese que las tres tablas anteriores son idénticas a las tablas de conjunción, disyunción y negación de enunciados (y proposiciones). La única diferencia es que aquí se emplea 1 y 0 en lugar de V y F Así, pues,

Teorema 16-5: El álgebra de un circuito conmutador booliano es un álgebra booliana

Para averiguar el funcionamiento de un circuito conmutador booliano se construye una tabla semejante a las tablas de verdad para las proposiciones.

Ejemplo 3-2: Sea el circuito (1) del Ejemplo 3-1. ¿Cómo funciona el circuito, es decir, cuándo está el circuito cerrado (o sea, cuándo pasará la corriente) y cuándo está abierto? Se construye una tabla de «verdad» para $A \wedge (B \vee A')$ así:

A	B	A'	$B \vee A'$	$A \wedge (B \vee A')$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

La corriente pasará, pues, solamente si están cerrados A y B.

Ejemplo 3-3: El funcionamiento del circuito (2) del Ejemplo 3-1 se indica en la siguiente tabla de verdad para $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$:

A	B	C	$(A$	$\wedge$	$B')$	$\vee$	$[(A'$	$\vee$	$C)$	$\wedge$	$B]$
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Paso			1	2	1	4	1	2	1	3	1

Observación 16-4: Toda combinación de interruptores mediante las conectivas $\wedge$ y $\vee$, tal como $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$, se llamará también polinomio booliano.

Problemas resueltos

TEOREMAS FUNDAMENTALES

1. Demostrar el Teorema 16-1-1 (ley de idempotencia): **(i)** $a + a = a$, **(ii)** $a * a = a$

Solución:

(ii)

	Proposición	**Razón**
(1)	$a = a * U$	(1) B_4. Identidad
(2)	$= a * (a + a')$	(2) B_5. Complemento
(3)	$= (a * a) + (a * a')$	(3) B_3. Ley distributiva
(4)	$= (a * a) + 0$	(4) B_5. Complemento
(5)	$= a * a$	(5) B_4. Identidad

(i) Verdadero por el principio de dualidad

2. Demostrar el Teorema 16-1-2: **(i)** $a + U = U$, **(ii)** $a * 0 = 0$.

Solución:

(i)

	Proposición	**Razón**
(1)	$U = a + a'$	(1) B_5. Complemento
(2)	$a + U = a + (a + a')$	(2) Sustitución
(3)	$= (a + a) + a'$	(3) B_2. Ley asociativa
(4)	$= a + a'$	(4) Teorema 16-1-1, ley de idempotencia
(5)	$= U$	(5) B_5. Complemento

(ii) Verdadero por el principio de dualidad

3. Demostrar el Teorema 16-1-3 (ley de involución): $(a')' = a$; esto es, si $(a)\ a + a' = U$, $(b)\ a * a' = 0$, $(c)\ a' + a'' = U$ y $(d)\ a' * a'' = 0$, es $a = a''$.

Solución:

	Proposición	**Razón**
(1)	$a = a + 0$	(1) B_4. Identidad
(2)	$= a + (a' * a'')$	(2) Hipótesis (d)
(3)	$= (a + a') * (a + a'')$	(3) B_3. Ley distributiva
(4)	$= U * (a + a'')$	(4) Hipótesis (a)
(5)	$= (a' + a'') * (a + a'')$	(5) Hipótesis (c)
(6)	$= (a'' + a') * (a'' + a)$	(6) B_1. Ley conmutativa
(7)	$= a'' + (a' * a)$	(7) B_3. Ley distributiva
(8)	$= a'' + (a * a')$	(8) B_1. Ley conmutativa
(9)	$= a'' + 0$	(9) Hipótesis (b)
(10)	$= a''$	(10) B_4. Identidad

4. Demostrar la unicidad de los elementos neutros, esto es, que

(a) *Si 0_1 y 0_2 son elementos neutros aditivos, entonces $0_1 = 0_2$.*

(b) Si I_1 e I_2 son elementos neutros multiplicativos, entonces $I_1 = I_2$.

Solución:

(a)

	Proposición	**Razón**
(1)	$0_1 = 0_1 + 0_2$	(1) Hipótesis (0_2 es un neutro aditivo)
(2)	$= 0_2 + 0_1$	(2) B_1. Ley conmutativa
(3)	$= 0_2$	(3) Hipótesis (0_1 es un neutro aditivo)

(b) Principio de dualidad

5. Demostrar el Teorema 16-1-4: Los elementos neutros son complementos el uno del otro, esto es, (i) $U' = 0$ y (ii) $0' = U$.

Solución:

(i)

Proposición	**Razón**
(1) $U' = U' * U$	(1) B_4, Identidad
(2) $\quad = U * U'$	(2) B_1, Ley conmutativa
(3) $\quad = 0$	(3) B_5, Complemento

(ii) Principio de dualidad

6. Demostrar el Teorema 16-1-5 (ley de De Morgan)

(i) $(a + b)' = a' * b'$, esto es, $(a + b) * (a' * b') = 0$ y $(a + b) + (a' * b') = U$.

(ii) $(a * b)' = a' + b'$, esto es, $(a * b) * (a' + b') = 0$ y $(a * b) + (a' + b') = U$.

Solución:

(i)

Proposición	**Razón**
(1) $(a + b) * (a' * b') = (a' * b') * (a + b)$	(1) B_1, Ley conmutativa
(2) $\quad = ((a' * b') * a) + ((a' * b') * b)$	(2) B_3, Ley distributiva
(3) $\quad = ((b' * a') * a) + ((a' * b') * b)$	(3) B_1, Ley conmutativa
(4) $\quad = (b' * (a' * a)) + (a' * (b' * b))$	(4) B_2, Ley asociativa
(5) $\quad = (b' * (a * a')) + (a' * (b * b'))$	(5) B_1, Ley conmutativa
(6) $\quad = (b' * 0) + (a' * 0)$	(6) B_5, Complemento
(7) $\quad = 0 + 0$	(7) Teorema 16-1-2
(8) $\quad = 0$	(8) Teorema 16-1-1
(9) $(a + b) + (a' * b') = U$	(9) Pasos (1)

(ii) Principio de dualidad

7. Demostrar (unicidad de complemento): Si a'_1 y a'_2 son complementos de a, esto es, $a + a'_1 = U$, $a + a'_2 = U$, $a * a'_1 = 0$ y $a * a'_2 = 0$, entonces $a'_1 = a'_2$.

Solución:

Proposición	**Razón**
(1) $a'_1 = a'_1 + 0$	(1) B_4, Identidad
(2) $\quad = a'_1 + (a * a'_2)$	(2) Hipótesis
(3) $\quad = (a'_1 + a) * (a'_1 + a'_2)$	(3) B_3, Ley distributiva
(4) $\quad = (a + a'_1) * (a'_1 + a'_2)$	(4) B_1, Ley conmutativa
(5) $\quad = U * (a'_1 + a'_2)$	(5) Hipótesis
(6) $\quad = (a'_1 + a'_2) * U$	(6) B_1, Ley conmutativa
(7) $\quad = a'_1 + a'_2$	(7) B_4, Identidad
(8) $a'_2 = a'_2 + a'_1$	(8) Pasos (1)
(9) $a'_1 + a'_2 = a'_2 + a'_1$	(9) B_1, Ley conmutativa
(10) $a'_1 = a'_2$	(10) Sustitución

8. Demostrar (ley absorción): (i) $a + (a * b) = a$, (ii) $a * (a + b) = a$.

Solución:

(i)

Proposición	**Razón**
(1) $a + (a * b) = (a * U) + (a * b)$	(1) B_4, Identidad
(2) $\quad = a * (U + b)$	(2) B_3, Ley distributiva
(3) $\quad = a * (b + U)$	(3) B_1, Ley conmutativa
(4) $\quad = a * U$	(4) Teorema 16-1-2
(5) $\quad = a$	(5) B_4, Identidad

(ii) Principio de dualidad

ORDEN

9. Demostrar el Teorema 16-2: Las condiciones siguientes son equivalentes:

$$(1)\ a * b' = 0,\quad (2)\ a + b = b,\quad (3)\ a' + b = U,\quad (4)\ a * b = a$$

Solución:

(Solo la equivalencia de (1), (2) y (3) se demuestra aquí. Que (4) es equivalente a los otros enunciados, se deja como ejercicio para el lector.) La demostración se efectúa en tres etapas:

(i) (1) implica (2), (ii) (2) implica (3), (iii) (3) implica (1)

Demostración de (i). $a * b' = 0$ implica $a + b = b$:

$$(a + b) = (a + b) * U = (a + b) * (b + b') = (b + a) * (b + b') = b + (a * b') \overset{H}{=} b + 0 = b.$$

Aquí $\overset{H}{=}$ significa que la hipótesis se utiliza en la etapa de la demostración. Las otras etapas utilizan los axiomas o teoremas previos.

Demostración de (ii). $a + b = b$ implica $a' + b = U$.

$$a' + b \overset{H}{=} a' + (a + b) = (a' + a) + b = (a + a') + b = U + b = U$$

Demostración de (iii). $a' + b = U$ implica $a * b' = 0$:

$a' + b = U$ implica $(a' + b)' = U'$ implica $a'' * b' = U'$ implica $a * b' = 0$

10. Demostrar el Teorema 16-3: Para cualesquiera $a, b \in B$:

(1) $a \precsim a$, (2) $a \precsim b$ y $b \precsim a$ implican $a = b$, (3) $a \precsim b$ y $b \precsim c$ implican $a \precsim c$.

Solución:

(1) Nótese que $a \precsim b$ ssi $a + b = b$. Luego $a + a = a$ implica $a \precsim a$.
(2) Nótese que $a \precsim b$ ssi $a + b = b$ y $b \precsim a$ ssi $b + a = a$. Luego $a = b + a = a + b = b$
(3) Nótese que $a \precsim b$ ssi $a + b = b$ y $b \precsim c$ ssi $b + c = c$. Por tanto,

$$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c$$

Y en consecuencia, $a \precsim c$

11. Demostrar: Si $a, b \in B$ es un álgebra booliana, entonces $a + b$ es un mayorante del conjunto $\{a, b\}$.

Solución:

Nótese que $a + (a + b) = (a + a) + b = a + b$. Por tanto, por definición, $a \precsim (a + b)$. Análogamente, $b \precsim (a + b)$. Así que $a + b$ es un mayorante de $\{a, b\}$.

12. Demostrar el Teorema 16-4: Sea $a, b \in B$ un álgebra booliana. Entonces

$$\text{(i)}\ a + b = \sup\{a, b\},\quad \text{(ii)}\ a * b = \inf\{a, b\}$$

Solución:

(Aquí solo se demuestra (i). Se deja la demostración de (ii) como ejercicio para el lector.)

Según el problema precedente, $a + b$ es un mayorante de $\{a, b\}$. Para demostrar que $a + b$ es el extremo superior de $\{a, b\}$, esto es, sup $\{a, b\}$, solo hay que demostrar que si c es también un mayorante de $\{a, b\}$, entonces $a + b$ es anterior a c. Es decir, que

$$a \precsim c \text{ y } b \precsim c \text{ implican } (a + b) \precsim c$$

Nótese que $a \precsim c$ ssi $a + c = c$ y $b \precsim c$ ssi $b + c = c$. Luego

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + c = c, \quad \text{es decir, } (a + b) \precsim c$$

13. Demostrar que el dual de $a \precsim b$ es $b \precsim a$, es decir, que la relación dual en un álgebra booliana B induce la relación inversa del orden parcial en B.

Solución:

Nótese que $a \precsim b$ ssi $a' + b = U$. El dual de $a' + b = U$ es $a' * b = 0$; luego $b * a' = 0$. Pero $b \precsim a$ ssi $b * a' = 0$. Por consiguiente, el dual de $a \precsim b$ es $b \precsim a$.

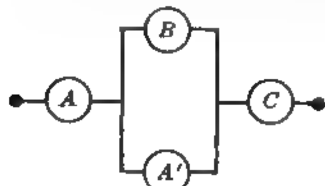
14. Demostrar: Los elementos neutros 0 y U son cotas universales, es decir, para todo $a \in B$, $0 \precsim a \precsim U$.

Solución:

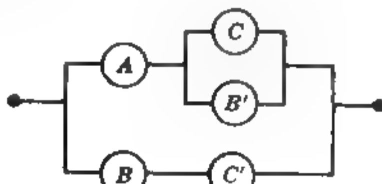
Nótese que $0 + a = a + 0 = a$; por tanto, $0 \precsim a$. También $a \precsim U$ ssi $a + U = U$ que es verdadero por el Teorema 16-1-2. O sea que, $0 \precsim a \precsim U$.

CIRCUITOS CONMUTADORES

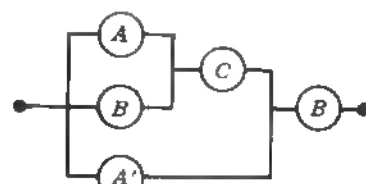
15. Determinar el polinomio booliano para cada uno de los circuitos que se dan



Circuito (1)



Circuito (2)



Circuito (3)

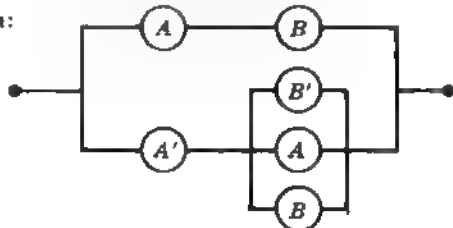
Solución:

(1) $A \wedge (B \vee A') \wedge C$ (2) $[A \wedge (C \vee B')] \vee (B \wedge C')$ (3) $\{[(A \vee B) \wedge C] \vee A'\} \wedge B$

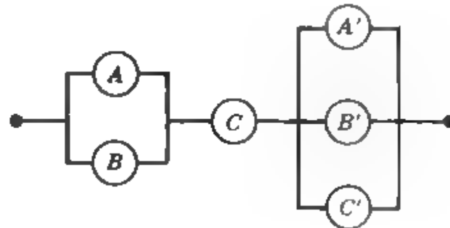
16. Construir un circuito para cada uno de los siguientes polinomios boolianos

(1) $(A \wedge B) \vee [A' \wedge (B' \vee A \vee B)]$, (2) $(A \vee B) \wedge C \wedge (A' \vee B' \vee C')$

Solución:



Circuito (1)



Circuito (2)

(1) Obsérvese que el circuito en serie $A \wedge B$ está en paralelo con $A' \wedge (B' \vee A \vee B)$ que es A' en serie con la combinación paralela $B' \vee A \vee B$.

(2) Nótese que el circuito paralelo $A \vee B$ está en serie con C y en serie con el circuito paralelo $A' \vee B' \vee C'$.

17. Construir un circuito equivalente más simple que el del diagrama adyacente.

Solución:

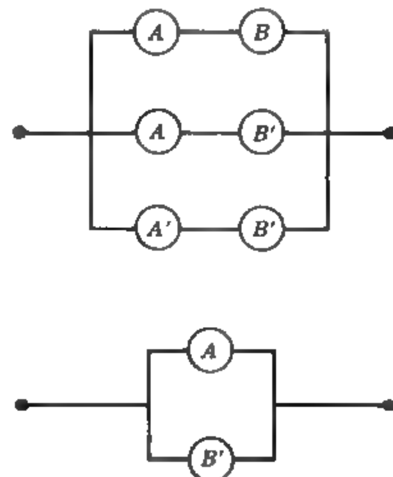
Primero se escribe un polinomio booliano que represente el circuito

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B') \vee (A' \wedge B')$$

Luego se simplifica

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (A \wedge B') \vee (A' \wedge B') &\equiv [A \wedge (B \vee B')] \vee (A' \wedge B') \\ &\equiv [A \wedge U] \vee (A' \wedge B') \\ &\equiv A \vee (A' \wedge B') \\ &\equiv (A \vee A') \wedge (A \vee B') \\ &\equiv U \wedge (A \vee B') \\ &\equiv A \vee B'\end{aligned}$$

Así, pues, la figura adyacente es un circuito equivalente.



18. Verificar la solución del Problema 17 por «tablas de verdad».

Solución:

A	B	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$B')$	$\vee$	$(A'$	$\wedge$	$B')$
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
Paso		1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

A	B	B'	$A \vee B'$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Problemas propuestos

19. Demostrar el Teorema 16-1-1 (i) $a + a = a$ (sin emplear el principio de dualidad)

20. Demostrar el Teorema 16-1-2 (ii) $a * 0 = 0$ (sin emplear el principio de dualidad)

21. Demostrar el Teorema 16-1-4 (ii) $0' = U$ (sin emplear el principio de dualidad)

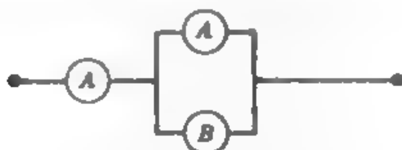
22. Demostrar el Teorema 16-1-5 (ii) $(a * b)' = a' + b'$ (sin emplear el principio de dualidad)

23. Demostrar la ley de absorción (ii) $a * (a + b) = a$ (sin emplear el principio de dualidad)

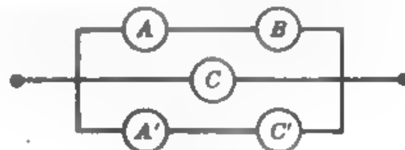
24. Terminar la demostración del Teorema 16-2 $a * b = a$ si, y solo si, $a * b' = 0$ (Referirse al Problema 9.)

25. Demostrar: $a \precsim b$ si, y solo si, $b' \precsim a'$

26. Determinar el polinomio booliano para cada uno de los circuitos dados



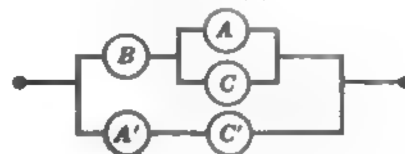
Circuito (1)



Circuito (3)



Circuito (2)



Circuito (4)

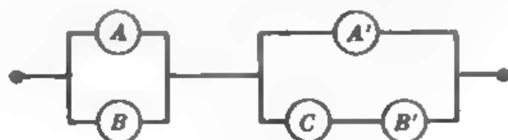
27. Construir un circuito para cada polinomio booliano

(1) $A \vee (B \wedge C)$
(2) $A \wedge (B \vee C)$
(3) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
(4) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
(5) $(A \vee B) \wedge [A' \vee (C \wedge B')]$
(6) $[(A \wedge B) \vee C] \wedge [D \vee (A' \wedge B)]$

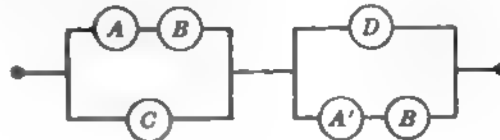
Respuestas a los problemas propuestos

26. (3) $(A \wedge B) \vee C \vee (A' \wedge C')$, (4) $[B \wedge (A \vee C)] \vee (A' \wedge C')$

27.



Circuito (5)



Circuito (6)

Capítulo 17

Razonamiento lógico

ARGUMENTOS

Un *argumento* es la afirmación de que un conjunto dado de enunciados $S_1, \ldots, S_n$, llamados *premisas*, implica (tiene como consecuencia) otro enunciado S llamado la *conclusión*. Se denotará un argumento por

$$S_1, S_2, \ldots, S_n \vdash S$$

Nótese que un argumento es un enunciado y, por tanto, tiene un valor de verdad. Si es verdadero se dice un argumento *válido*; si es falso se dice que es una *falacia*.

Ejemplo 1-1: Sea el siguiente argumento:

S_1: Algunos animales pueden razonar
S_2: El hombre es un animal
. . . .
S: El hombre puede razonar

Aquí el enunciado S bajo la línea es la conclusión y los enunciados S_1 y S_2 sobre la línea, son las premisas. Si bien cada enunciado es verdadero, se puede demostrar que el argumento $S_1, S_2 \vdash S$ es una falacia.

Ejemplo 1-2: Sea el siguiente argumento:

S_1: Los niños son ilógicos.
S_2: No se desdeña a quien puede domar un cocodrilo.
S_3: Las gentes ilógicas son desdeñadas.
. . . .
S: Los niños no pueden domar cocodrilos

(Este razonamiento se ha adaptado de *Symbolic Logic*, de Lewis Carroll, el autor de *Alice in Wonderland*.) El argumento $S_1, S_2, S_3 \vdash S$ es válido.

Observación 17-1: Obsérvese que el valor de verdad de un argumento $S_1, \ldots, S_n \vdash S$ no depende del valor de verdad particular de cada enunciado del argumento.

ARGUMENTOS Y DIAGRAMAS DE VENN

Muchos enunciados verbales se pueden traducir en enunciados equivalentes sobre conjuntos, los cuales se pueden describir por diagramas de Venn. Por eso los diagramas de Venn se emplean a menudo para determinar la validez de un razonamiento o argumento.

Ejemplo 2-1: Sea el argumento del Ejemplo 1-2. Por S_1, el conjunto de niños es un subconjunto del conjunto de las gentes ilógicas, es decir



Por S_3, el conjunto de las gentes ilógicas está contenido en el de las gentes desdeñadas, esto es,



Por S_2, el conjunto de las gentes desdeñadas y el conjunto de gentes que pueden domar un cocodrilo son disjuntos, es decir,



Nótese que el conjunto de niños y el de gentes que pueden domar un cocodrilo son disjuntos. O sea que «Los niños no pueden domar cocodrilos» es una consecuencia de S_1, S_2 y S_3, esto es,

$$S_1, S_2, S_3 \vdash S$$

es un argumento válido.

ARGUMENTOS Y PROPOSICIONES

Un enunciado de que un conjunto de proposiciones $P_1, \ldots, P_n$ da lugar a otra proposición P, lo que se denota por

$$P_1, \ldots, P_n \vdash P$$

se dice un *argumento sobre proposiciones*, o simplemente un *argumento*.

Definición 17-1: Un argumento sobre proposiciones $P_1, \ldots, P_n \vdash P$ se dice *válido* si P es verdadero siempre que $P_1, \ldots, P_n$ son verdaderos, o lo que es lo mismo, si

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow P$$

esto es, si

$$(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow P$$

es una tautología.

Por el principio de sustitución, las variables en toda tautología se pueden sustituir por proposiciones. Por consiguiente,

Teorema 17-1: Si el argumento

$$P_1(p, q, \ldots), \ldots, P_n(p, q, \ldots) \vdash P(p, q, \ldots)$$

es válido, entonces, para cualesquiera proposiciones P', Q', ..., el argumento

$$P_1(P', Q', \ldots), \ldots, P_n(P', Q', \ldots) \vdash P(P', Q', \ldots)$$

es también válido.

Ejemplo 3-1: El argumento $p, p \rightarrow q \vdash q$ (Ley de desprendimiento) es válido. En otras palabras, si p y $p \rightarrow q$ son verdaderos, entonces q es verdadero. La demostración de esta regla se sigue directamente de la tabla de verdad adyacente de $p \rightarrow q$. Nótese que p es verdadero en los casos (filas) 1 y 2, y que $p \rightarrow q$ es verdadero en los casos 1, 3 y 4. Luego p y $p \rightarrow q$ son verdaderos simultáneamente solo en el caso 1, donde q es verdadero. En otras palabras, p y $p \rightarrow q$ implican q, es una proposición válida.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 3-2: El argumento $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ (Ley del silogismo) es válido. Pues se demostró antes que

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$$

Luego, por la Definición 17-1, el argumento es válido.

La relación entre argumentos válidos sobre proposiciones y argumentos válidos en general es la siguiente:

Principio fundamental sobre la argumentación: Dados los argumentos sobre proposiciones

$$P_1(p, q, \ldots), \ldots, P_n(p, q, \ldots) \vdash P(p, q, \ldots)$$

si los enunciados $p_0, q_0, \ldots$ se sustituyen a las variables $p, q, \ldots$, entonces el argumento

$$P_1(p_0, q_0, \ldots), \ldots, P_n(p_0, q_0, \ldots) \vdash P(p_0, q_0, \ldots)$$

es válido si, y solamente si, el argumento dado sobre proposiciones es válido.

Ejemplo 3-3: Sea el argumento,

S_1: Si un hombre es soltero, es infeliz
S_2: Si un hombre es infeliz, muere joven

S: Los solteros mueren jóvenes.

Sea p «El es soltero», sea q «El es infeliz» y sea r «El muere joven». Entonces $S_1, S_2 \vdash S$ se puede escribir

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

que es un argumento válido sobre proposiciones (Ley del silogismo, Ejemplo 3-2). En consecuencia, el argumento dado es válido

ARGUMENTOS Y CUANTIFICADORES

Sea $p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A. Si

$$(\forall x \in A)\ p(x)$$

es verdadero, entonces, en particular, $p(x_0)$ es también verdadero para un cierto elemento $x_0 \in A$. Análogamente, si $p(x_0)$ es verdadero para un elemento dado $x_0 \in A$, entonces el enunciado cuantificado

$$(\exists x \in A)\ p(x)$$

es tambien verdadero. Es decir,

Principio fundamental sobre argumentos y cuantificadores: Sea $p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A. Entonces cada uno de los argumentos siguientes es válido:

$$(\forall x \in A)\, p(x),\ x_0 \in A \quad \vdash \quad p(x_0)$$
$$x_0 \in A,\ p(x_0) \quad \vdash \quad (\exists x \in A)\, p(x)$$

Ejemplo 4-1: Sea el argumento clásico:

S_1: Todo hombre es mortal
S_2: Sócrates es hombre.
. . . .
S Sócrates es mortal.

Sea M el conjunto de los hombres, sea $p(x)$ «x es mortal» y sea x_0 el elemento Sócrates. Entonces el argumento anterior se puede escribir en la forma

S_1: $(\forall x \in M)\ p(x)$
S_2: $x_0 \in M$
. . . .
S: $p(x_0)$

Por tanto, por el principio fundamental, el argumento es válido.

ENUNCIADOS CONDICIONALES Y VARIACIONES

Sea la proposición condicional $p \rightarrow q$ y otras proposiciones condicionales simples que contengan p y q, esto es, $q \rightarrow p$, $\sim p \rightarrow \sim q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$, que se llaman, respectivamente, proposiciones *recíproca*, *contraria* y *contrarrecíproca*. Las tablas de verdad de estas cuatro proposiciones son como sigue:

p	q	Condicional $p \rightarrow q$	Recíproca $q \rightarrow p$	Contraria $\sim p \rightarrow \sim q$	Contrarrecíproca $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Obsérvese primero en esta tabla que un enunciado condicional y su recíproco o su contrario no son, lógicamente, equivalentes. El teorema siguiente, sin embargo, es una consecuencia de la tabla de verdad anterior.

Teorema 17-2: Un enunciado condicional $p \to q$ y su contrarrecíproco $\sim q \to \sim p$ son lógicamente equivalentes.

Ejemplo 5-1: Sean los enunciados siguientes sobre un triángulo A

$p \to q$: Si A es equilátero, A es isósceles.
$q \to p$: Si A es isósceles, A es equilátero.

Nótese que $p \to q$ es verdadero, pero $q \to p$ es falso.

Ejemplo 5-2: Demostrar: $(p \to q)$: Si x^2 es impar, x es par.

Demuéstrese que la contrarrecíproca $\sim q \to \sim q$, es decir, «Si x es par entonces x^2 es par» es verdadera. Sea x par; entonces $x = 2n$ donde $n \in N$, los numeros naturales. Por tanto, $x^2 = (2n)(2n) = 2(2n^2)$ es tambien par. Como la contrarrecíproca $\sim q \to \sim p$ es verdadera, el enunciado condicional dado $p \to q$ es también verdadero.

Observación 17-2: En general, la recíproca, contraria y contrarrecíproca de una proposición $P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$ son respectivamente $Q \to P$, $\sim P \to \sim Q$ y $\sim Q \to \sim P$. Además, por el Teorema 17-2 y por el principio de sustitución

$$P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots) \equiv \sim Q(p, q, \ldots) \to \sim P(p, q, \ldots)$$

Problemas resueltos

ARGUMENTOS Y DIAGRAMAS DE VENN

1. Demuéstrese que los argumentos siguientes no son válidos construyendo un diagrama de Venn en el que las premisas sean válidas pero la conclusión no.

(1) Algunos estudiantes son perezosos.
Todos los varones son perezosos.
....
Algunos estudiantes son varones.

(2) Todos los estudiantes son perezosos.
Nadie que sea rico es estudiante.
....
Los perezosos no son ricos.

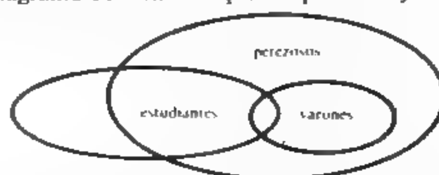
Solución:

(1) Sea el siguiente diagrama de Venn:



Nótese que ambas premisas son válidas, pero que la conclusión no lo es.

Es posible construir un diagrama de Venn en que las premisas y la conclusión sean válidas, tal como



Para ser válido un argumento, la conclusión debe ser siempre verdadera cuando lo sean las premisas. Como el primer diagrama da un caso en que la conclusion no es verdadera, aun siendo verdaderas las premisas el argumento no es válido.

(2) Sea el diagrama de Venn siguiente:



Obsérvese que las premisas son válidas pero que la conclusión no lo es; así, pues, el argumento no es válido.

2. Para cada conjunto de premisas hallar una conclusión tal que el argumento sea válido y tal que *cada premisa sea necesaria para la conclusión.*

(1) S_1: Ningún estudiante es perezoso.
S_2: Juan es un artista.
S_3: Todos los artistas son perezosos.

. . . .

S:

(2) S_1: Todos los abogados son ricos.
S_2: Los poetas son caprichosos.
S_3: Marcos es abogado.
S_4: Ningun caprichoso es rico

. . . .

S

Solución:

(1) Por S_3, el conjunto de los artistas es un subconjunto del conjunto de los perezosos. Por S_1, el conjunto de los perezosos y el de los estudiantes son disjuntos. Entonces



Por S_2, Juan pertenece al conjunto de los artistas; luego la conclusión correcta, como lo indica el diagrama de Venn, es «Juan no es estudiante»

(2) Por S_1, el conjunto de los abogados es un subconjunto del conjunto de los ricos. Por S_4, el conjunto de los ricos y el de los caprichosos son disjuntos. Así, pues,



Por S_2, el conjunto de los poetas es un subconjunto del conjunto de los caprichosos, es decir,



Por S_3, Marcos es un abogado, luego la conclusión correcta, por el diagrama de Venn, es «Marcos no es poeta».

ARGUMENTOS Y PROPOSICIONES

3. Determinar la validez de los argumentos siguientes:

$$(1)\quad p \to q,\ \sim p \ \vdash\ \sim q \qquad\qquad (2)\quad p \leftrightarrow q,\ q\ \vdash\ p$$

Solución:

Construir las tablas de verdad

p	q	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$p]$	$\to$	$\sim$	q
V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	F
Paso		1	2	1	3	2	1	4	2	1

(1)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(2)

(1) Como $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ no es una tautologia, $p \to q,\ \sim p \vdash \sim q$ es una falacia

(2) Notese que $p \leftrightarrow q$ es verdadero en los casos (filas) 1 y 4, y que q es verdadero en los casos 1 y 3; luego $p \leftrightarrow q$ y q son verdaderos simultáneamente solo en el caso 1 en que p es tambien verdadero. En consecuencia, $p \leftrightarrow q,\ q \vdash p$ es un argumento válido

4. Demostrar que el siguiente argumento es válido:

$$p \to \sim q,\ r \to q,\ r \vdash \sim p$$

Es decir, que si $p \to \sim q$, $r \to q$ y r son verdaderos, entonces $\sim p$ es verdadero.

Solución:

Método 1: Constrúyanse las tablas de verdad siguientes

	p	q	r	$p \to \sim q$	$r \to q$	$\sim p$
1	V	V	V	F	V	F
2	V	T	F	F	V	F
3	V	F	V	V	F	F
4	V	F	F	V	V	F
5	F	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	V	V
7	F	F	V	V	F	V
8	F	F	F	V	V	V

Nótese que $p \to \sim q$, $r \to \sim q$ y r son verdaderos simultáneamente sólo en el caso (fila) 5 en que $\sim p$ es también verdadero; luego el argumento dado es válido

Método 2. Construyendo una tabla de verdad para la proposición

$$[(p \to \sim q) \wedge (r \to q) \wedge r] \to \sim p$$

se encuentra que es una tautología; con lo que el argumento es válido.

Método 3 **Proposición**	**Razón**
(1) $p \to \sim q$ es cierta.	(1) Dada
(2) $r \to q$ es cierta	(2) Dada
(3) $\sim q \to \sim r$ es cierta.	(3) Contrarrecíproca de (2)
(4) $p \to \sim r$ es cierta.	(4) Ley del silogismo, empleando (1) y (2)
(5) $r \to \sim p$ es cierta.	(5) Contrarrecíproca de (4)
(6) r es cierta.	(6) Dada
(7) $\therefore \sim p$ es cierta.	(7) Ley de desprendimiento, empleando (5) y (6)

5. Averiguar la validez de los siguientes argumentos.

(1) Si llueve, Enrique enfermará.
No llovió.
. . . .
Enrique no enfermó.

(2) Si llueve, Enrique enfermará.
Enrique no enfermó.
. . . .
No llovió.

Solución:

(1) Sea p «Llueve» y sea q «Enrique está enfermo». Entonces el argumento dado se puede escribir $p \to q$, $\sim p \vdash \sim q$ lo cual, según el Problema 3, es una falacia. Así que el argumento dado es una falacia

(2) Sea p «Llueve» y sea q «Enrique está enfermo» Entonces el argumento dado se puede escribir $p \to q$, $\sim q \vdash \sim p$ lo que, mediante una tabla de verdad, se puede demostrar que es válido El argumento dado es, pues, válido

RECIPROCA Y VARIACIONES

6. Hallar y simplificar. (1) Contrarrecíproca de la contrarrecíproca de $p \to q$. (2) Contrarrecíproca de la recíproca de $p \to q$. (3) Contrarrecíproca de la contraria de $p \to q$.

Solución:

(1) La contrarrecíproca de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$ La contrarrecíproca de $\sim q \to \sim p$ es $\sim\sim p \to \sim\sim q \equiv p \to q$, que es la proposición condicional original.

(2) La recíproca de $p \to q$ es $q \to p$. La contrarrecíproca de $q \to p$ es $\sim p \to \sim q$, que es la contraria de $p \to q$

(3) La contraria de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$. La contrarrecíproca de $\sim p \to \sim q$ es $\sim\sim q \to \sim\sim p \equiv q \to p$ que es la recíproca de $p \to q$.

7. Averiguar la contrarrecíproca de cada proposición.

(1) Si Juan es poeta, entonces es pobre.
(2) Sólo si Marcos estudia, pasará el examen.
(3) Es preciso que nieve para que Enrique esquíe.
(4) Si x es menor que cero, entonces x no es positivo.

Solución:

(1) Nótese que la contrarrecíproca de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$. Por tanto, la contrarrecíproca de la proposición dada es «Si Juan no es pobre, entonces no es poeta».

(2) La proposición dada es equivalente a «Si Marcos pasa el examen, entonces ha estudiado». Por tanto, la contrarrecíproca de la proposición dada es «Si Marcos no estudia, entonces no pasará el examen».
(3) La proposición dada es equivalente a la proposición «Si Enrique esquia, entonces ha nevado». Luego la contrarrecíproca es «Si no ha nevado, entonces Enrique no esquiará».
(4) Nótese que la contrarrecíproca de $p \to \sim q$ es $\sim\sim q \to \sim p \equiv q \to \sim p$. Luego la contrarrecíproca de la proposición dada es «Si x es positivo, entonces x no es menor que cero».

Problemas propuestos

8. Determinar la validez de los argumentos siguientes:

(1) $p \to q,\ r \to \sim q \ \vdash\ r \to \sim p$ (2) $p \to \sim q,\ \sim r \to \sim q \ \vdash\ p \to \sim r$

9. Encontrar una conclusión adecuada a las premisas dadas, de modo que el argumento sea válido.

(1) $p \to \sim q,\ q$ (2) $p \to \sim q,\ r \to q$ (3) $p \to \sim q,\ \sim p \to r$ (4) $p \to \sim q,\ r \to p,\ q$

10. Determinar la validez de cada uno de los siguientes argumentos para cada conclusión propuesta.

(1) Ningún profesor es rico.
Algunos poetas son ricos.
(a) Algunos poetas son profesores.
(b) Algunos poetas no son profesores.

(2) Todos los poetas son gente interesante.
Aura es una persona interesante.
(a) Aura es poeta.
(b) Aura no es poeta.

(3) Todos los poetas son pobres.
Para ser maestro, hay que ser graduado.
Algunos matemáticos son poetas.
Ningún graduado es pobre.
(a) Algunos matemáticos no son maestros.
(b) Algunos maestros no son matemáticos.
(c) Los maestros no son pobres.
(d) Algunos matemáticos no son pobres.
(e) Los poetas no son maestros.
(f) Si Marcos es graduado, entonces no es poeta.

(4) Todos los matemáticos son personas interesantes.
Algunos maestros venden seguros.
Algunos filósofos son matemáticos.
Solo la gente que no es interesante se pone a vender seguros.
(a) Algunos filósofos no son vendedores de seguros.
(b) Los vendedores de seguros no son matemáticos.
(c) Algunas personas interesantes no son maestros.
(d) Algunos maestros no son filósofos.
(e) Algunos maestros no son personas interesantes.

11. Hallar: (1) Contrarrecíproca de $p \to \sim q$.
(2) Contrarrecíproca de $\sim p \to q$.
(3) Contrarrecíproca de la recíproca de $p \to \sim q$.
(4) Recíproca de la contrarrecíproca de $p \to \sim q$.

12. Hallar la contrarrecíproca de cada una de las siguientes proposiciones:
(1) Si él tiene valor, ganará.
(2) Es preciso ser fuerte para ser marinero.
(3) Solo si no se cansa ganará.
(4) Es suficiente que sea un cuadrado para ser un rectángulo.

Respuestas a los problemas propuestos

8. (1) válido (2) falacia

9. (1) $\sim p$ (2) $p \to \sim r$ (3) $q \to r$ (4) $\sim r$

10. (1) (a) falacia, (b) válido
(2) (a) falacia, (b) falacia
(3) (a) válido, (b) falacia, (c) válido, (d) falacia, (e) válido, (f) válido
(4) (a) válido, (b) válido, (c) falacia, (d) falacia, (e) válido

11. (1) $q \to \sim p$ (2) $\sim q \to p$ (3) $\sim p \to q$ (4) $p \to q$

12. (1) Si él no gana, entonces no tiene valor.
(2) Si él no es fuerte, entonces no es marinero.
(3) Si él se cansa, entonces no ganará.
(4) Si no es un rectángulo, no es un cuadrado.

INDICE